

数学演習第二 第13回 行列と線形変換の固有値, 表現行列の対角化

(2018.1.24 実施)

1 正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ.

- (1) A の固有多項式 $F_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ を計算し, A の固有値を求めよ.
- (2) A の各固有値 λ に対して, 同次連立1次方程式 $(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解 (固有値 λ に対応する1次独立な固有ベクトルの組) を求めよ.
- (3) A を対角化せよ.
(すなわち, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P および対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ. (3) では P^{-1} を計算する必要はない.)
- (4) P^{-1} を求めて, 行列 A の n 乗 A^n ($n \geq 0$) を計算せよ.

2 次のそれぞれの行列 A について, 固有値をすべて求め, 対角化可能かどうか判定せよ. 対角化可能な場合には, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P および対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

$$\begin{array}{lll}
 (1) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} & (2) \begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix} & (3) \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\
 (4) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & (5) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} &
 \end{array}$$

3 (木田『線形代数学講義』問 24.2) ベクトル空間 V の基底 $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ に対し,

$$f(\mathbf{a}_1) = 3\mathbf{a}_1 - 6\mathbf{a}_3, \quad f(\mathbf{a}_2) = -4\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 6\mathbf{a}_3, \quad f(\mathbf{a}_3) = -\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$$

で定義される線形変換 $f: V \rightarrow V$ を考える.

- (1) \mathcal{A} に関する f の表現行列を求めよ.
- (2) 線形変換 f の固有値をすべて求めよ.
- (3) f の表現行列が対角行列となるような V の基底は存在するか. もし存在するならばその基底を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を用いて表せ.

4 2 (1) の解答を利用して, 次の問いに答えよ.

(1) 連立漸化式 $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = 4a_{n-1} - b_{n-1} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \begin{cases} a_0 = \alpha \\ b_0 = \beta \end{cases}$ で定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 連立微分方程式 $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 4x(t) - y(t) \end{cases}$ の一般解を求めよ.