数学演習第二（演習第２回）　【解答例】

線形：直線・平面の方程式と外積　 2017 年 10 月 11 日 実施

$\boxed{1}$ (1) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}6\\-6\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-6\\6\\-3\end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}6\\-6\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15\\-12\\6\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\6\end{bmatrix}$. (外積の結合律は不成立!)

(2) $\boldsymbol{b}=t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}_2$ と $\boldsymbol{a}$ との内積をとり, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=t\|\boldsymbol{a}\|^2$. よって $t=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$ となり, $\boldsymbol{b}_1=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$.
更に, $\|\boldsymbol{b}_1\|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|}$, $\|\boldsymbol{b}_2\|=\sqrt{\|\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{b}_1\|^2}=\dfrac{\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ ($\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}$ が直角三角形をなすことに注意). ここまでは $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ のベクトルで成立するが, $\|\boldsymbol{b}_2\|$ について, 平面ベクトルであれば行列式を用いて $\|\boldsymbol{b}_2\|=\dfrac{|\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}]|}{\|\boldsymbol{a}\|}$, 空間ベクトルであれば外積を用いて $\|\boldsymbol{b}_2\|=\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ と表せる.

(3) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=-2+1-8=-9$, $\|\boldsymbol{u}\|=3$, $\|\boldsymbol{v}\|=3\sqrt{2}$. また, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ のなす角 θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ は,

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}=\frac{-9}{3\cdot3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\text{より,}\quad\theta=\frac{3\pi}{4}.$$

更に, $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ 方向への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}=\dfrac{-9}{9}\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}$.

(4) $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ を第 3 列に関して余因子展開し, そのあと外積の定義を用いて,

$$\begin{aligned}\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]&=c_1\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_3&b_3\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\\&=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

この関係式を用いて, ① $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}]=0$, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{b}]=0$ (同じ列を含む行列式の値は 0). ② $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2$. あとは $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が 1 次独立のとき $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ を示せばよいが, 図形的に考えれば $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積$)$ なので, これは明らか.

$\boxed{2}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}={}^{\mathrm{t}}(-2,4)$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}={}^{\mathrm{t}}(1,5)$ より, $(\triangle\mathrm{PQR}$ の面積$)=\dfrac{1}{2}\left|\det[\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}]\right|=7$.

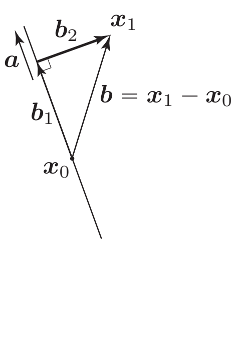
(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}={}^{\mathrm{t}}(2,-2,-6)$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}={}^{\mathrm{t}}(-2,-1,1)$, $\overrightarrow{\mathrm{PS}}={}^{\mathrm{t}}(3,0,-2)$ より, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}={}^{\mathrm{t}}(-8,10,-6)$ となり,

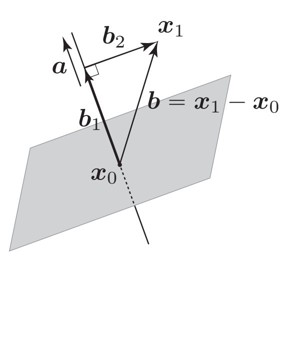
$$(\triangle\mathrm{PQR}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}\|=\frac{1}{2}\|{}^{\mathrm{t}}(-8,10,-6)\|=5\sqrt{2},$$

$$(\text{四面体 PQRS の体積})=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{PS}}\right|=\frac{1}{6}\left|{}^{\mathrm{t}}(-8,10,-6)\cdot{}^{\mathrm{t}}(3,0,-2)\right|=2.$$

$\boxed{3}$ (1) ① 点 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boxed{1}$ の直線との距離は $\boxed{1}$(2) で $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ と考えたときの $\|\boldsymbol{b}_2\|$ に等しい (下左図). よって, 求める距離は $\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. (“垂線の足” は $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{x}_0+\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ で与えられる.)

② 点 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boxed{2}$ の平面との距離は $\boxed{1}$(2) で $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ と考えたときの $\|\boldsymbol{b}_1\|$ に等しい (下右図). よって, 求める距離は $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. (“垂線の足” は $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{x}_1-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ で与えられる.) 平面が $ax+by+cz+d=0$ と表されるなら $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_0+d=0$ であるから, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_1+d$ となり, 距離は $\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ と表される.





(2) ① 直線は通る点と方向ベクトルにより決定される．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ が直線 PQ の方向ベクトルを与えるので，直線 PQ の方程式は $x-1 = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z}{3}$.

② 平面は通る点と法線ベクトルにより決定される．まず，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ が平面 PQR の法線ベクトルを与える．よって，平面 PQR の方程式は

$$3(x-1)+5(y-1)+4z=0.\quad \text{これを整理して,}\ 3x+5y+4z=8.$$

次に，(1)② を利用するために，$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (P の位置ベクトル)，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (S の位置ベクトル)，$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ (平面 PQR の法線ベクトル) とおけば，点 S と平面 PQR の距離は $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|} = \dfrac{20}{\sqrt{50}} = 2\sqrt{2}$.

③ 平面 PQR の法線は $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線であるから，これが点 P を通るとき，その方程式は $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z}{4}$. 次に，② と同じく $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{a}$ を定めれば，$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ より，(1)① を用いて，点 S とこの直線の距離は $\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|} = \dfrac{4\sqrt{50}}{\sqrt{50}} = 4$.

【注】②, ③の距離は S から平面, 直線に下ろした "垂線の長さ" に他ならない．②では S から平面 PQR に垂線 ST を下ろせば，T $(-1+3t, 3+5t, 4+4t)$ が $3x+5y+4z=8$ 上にあるから $t=-\frac{2}{5}$ となり，$\|\overrightarrow{\mathrm{ST}}\| = 2\sqrt{2}$. ③では S から "P を通る平面 PQR の法線" に垂線 SU を下ろせば，U $(1+3u, 1+5u, 4u)$ が $\overrightarrow{\mathrm{SU}} \perp \boldsymbol{a}$ を満たすから $u=\frac{2}{5}$ となり，$\|\overrightarrow{\mathrm{SU}}\| = 4$.

(3) 2 平面の法線ベクトルが $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ であるから，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ が交線の方向ベクトルとなる．一方，交線と xy 平面との交点は $\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ z=0 \end{cases}$ を解いて，$(x,y,z)=(-2,3,0)$. よって，交線の方程式は $\dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-3}{7} = z$ $\left(\Leftrightarrow\ x=-4t-2,\ y=7t+3,\ z=t\right)$. あるいは，交線上の点は連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}$ の解であると考えて，行基本変形

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

により，上と同じパラメータ表示を得る．次に，2 平面のなす角 θ ($0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$) は 2 平面の法線のなす角に等しいから，$\cos\theta = \dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \dfrac{0}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = 0$. よって，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

【注】2 直線の方向ベクトルが $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ であるとき，この 2 直線のなす角 θ ($0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$) は「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角」または「$\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b}$ のなす角」のいずれかで与えられる．従って，$\cos\theta = \dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$ が成り立つ．

(4) ① 直線 ℓ 上の点 $(5t+1,\ 3t-1,\ -4t+5)$ を平面 P の方程式 $5x-4y-3z=19$ に代入して，

$$5(5t+1)-4(3t-1)-3(-4t+5)=19. \qquad \therefore\ t=1.$$

よって，交点 $\boldsymbol{x}_0$ の座標は $(6,2,1)$.

② P の法線ベクトルが $\boldsymbol{a} := \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$, ℓ の方向ベクトルが $\boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ であるから，$\boldsymbol{b}$ の平面 P への正射影は

$$\boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{25}{50}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{5}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

よって，直線 ℓ' の方程式は $x-6 = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

③ $\boldsymbol{b}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ が直線 ℓ' の方向ベクトルであるから，直線 ℓ, ℓ' のなす角を θ ($0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$) とすれば，

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}'|}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{b}'\|} = \frac{|5+6+4|}{\sqrt{50}\sqrt{6}} = \frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \therefore\ \theta = \frac{\pi}{6}.$$