数学演習第二 （演習第２回）

線形：直線・平面の方程式と外積

2017 年 10 月 11 日 実施

$\boxed{1}$ ［内積, 外積］ (線形 p.4, p.8)

- 空間ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$ で定義される.

(1) $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ に対して, $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$, $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$ を計算せよ.

(2) 空間ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ に対して, $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ ($\boldsymbol{b}_1=t\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{a}=0$) の形に分解せよ. (このとき, $\boldsymbol{b}_1$ を $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ 方向の直線への正射影 (あるいは $\boldsymbol{a}$ への正射影) と呼び, $\boldsymbol{b}_2$ を $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ と直交する平面への正射影と呼ぶ.) 更に, $\|\boldsymbol{b}_1\|$ と $\|\boldsymbol{b}_2\|$ を $\|\boldsymbol{a}\|$, $\|\boldsymbol{b}\|$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ を用いて表せ ($\boxed{2}$ の説明も見よ).

(3) (1) の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対して, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$, $\|\boldsymbol{u}\|$, $\|\boldsymbol{v}\|$ および $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ のなす角を求めよ. また, $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影を計算せよ.

(4) 空間ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を 3 列に並べてできる行列式を $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ と表すとき, これを第 3 列に関して余因子展開して $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ を示せ. 更に, この関係式を用いて, 次を示せ: ① $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$, ② $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が 1 次独立ならば $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]>0$ (すなわち $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が右手系).

$\boxed{2}$ ［面積, 体積］ (線形 p.6, p.8, pp.85–86)

- 平面ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して,

  $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S=|\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}]|$.

- 空間ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ に対して,

  $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|\ \left(=\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}\,\right)$,

  $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 $V=|\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]|\ \left(=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|\right)$.

(1) $\mathrm{P}(1,-2)$, $\mathrm{Q}(-1,2)$, $\mathrm{R}(2,3)$ のとき, $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ.

(2) $\mathrm{P}(-1,2,1)$, $\mathrm{Q}(1,0,-5)$, $\mathrm{R}(-3,1,2)$, $\mathrm{S}(2,2,-1)$ のとき, $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積, および四面体 (三角錐) PQRS の体積を求めよ.

$\boxed{3}$ ［空間内の直線と平面］ (線形 pp.10–13)

$\boxed{1}$ 点 $\boldsymbol{x}_0={}^{\mathrm{t}}(x_0,y_0,z_0)$ を通り, $\boldsymbol{a}={}^{\mathrm{t}}(a,b,c)\neq 0$ を方向ベクトルとする直線は これを成分表示し, t を消去することにより, 直線の方程式 $\boxed{\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}}$ を得る. (この表現は $abc\neq 0$ のとき意味を持つ. 例えば $a=0, bc\neq 0$ なら, $x=x_0$, $\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ となる.)

$\boxed{2}$ 点 $\boldsymbol{x}_0={}^{\mathrm{t}}(x_0,y_0,z_0)$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ (1 次独立) で ‘張られる’ 平面は $\boxed{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+s\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{c}}$ (s,t は媒介変数) と表される (平面のベクトル方程式). これと $\boldsymbol{a}:=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ との内積をとれば, s,t が消去され, $\boxed{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0}$. このとき, $\boldsymbol{a}={}^{\mathrm{t}}(a,b,c)$ は平面の法線ベクトルであり, 平面の方程式 $\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$ が得られる. (通常は $ax+by+cz+d=0$ あるいは $ax+by+cz=d'$ の形に整理する.)

(1) ① 点 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boxed{1}$ の直線の距離 (垂線の長さ) は $\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ で与えられることを示せ (ヒント: $\boxed{1}$ (2) を利用).
② 点 $\boldsymbol{x}_1={}^{\mathrm{t}}(x_1,y_1,z_1)$ と ② の平面 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0$ との距離 (垂線の長さ) は $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ $\Bigl($平面が $ax+by+cz+d=0$ と表されるなら $\boxed{\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}\Bigr)$ で与えられることを示せ.

(2) $\mathrm{P}(1,1,0)$, $\mathrm{Q}(2,-2,3)$, $\mathrm{R}(3,-1,1)$, $\mathrm{S}(-1,3,4)$ とする. ① 直線 PQ (2 点 P, Q を通る直線) の方程式を求めよ. ② 平面 PQR (3 点 P, Q, R を通る平面) の方程式を求めよ. (まず法線ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ.) また, 点 S とこの平面の距離を求めよ. ③ 点 P を通る平面 PQR の法線の方程式を求めよ. また, 点 S とこの直線の距離 (= 点 S からこの直線へ下ろした垂線の長さ) を求めよ.

(3) 2 平面 $x+y-3z=1$, $2x+y+z=-1$ の交線の方程式を求めよ. また, 2 平面のなす角を求めよ. (交線の方向ベクトルは 2 平面の法線ベクトルと直交することに注意. また, 交線が通る点としては例えば xy 平面との交点を考えるとよい. あるいは, 交線上の点を連立 1 次方程式の解の集合と考えてもよい.)

(4) 直線 $\ell:\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-5}{-4}$ と平面 $P: 5x-4y-3z=19$ に対して, ① 直線 ℓ と平面 P の交点 $\boldsymbol{x}_0$ を求めよ. ② 直線 ℓ を平面 P 上に正射影して得られる直線 ℓ' ($\boldsymbol{x}_0$ を通り, ℓ の方向ベクトルの平面 P への正射影を方向ベクトルとする直線) の方程式を求めよ. ③ 2 直線 ℓ,ℓ' のなす角 (= 直線 ℓ と平面 P のなす角) を求めよ.