

2017 数学演習第二 第3回「ベクトル空間・部分空間」解答例

1 部分空間となっているのは, (6)(8)(10).

(1)  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin W$  だから (i) は不成立. (2)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$  だから (ii) は不成立.

(3)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$  だから (ii) は不成立.

(4)  $k$  が整数でない実数なら,  $k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$  だから (iii) は不成立.

(5)  $k < 0$  なら  $k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$  だから (iii) は不成立.

(6)  $\mathbf{0} \in W$  より (i) は成立.  $x + 2y + z = 0$  のとき  $(kx) + 2(ky) + (kz) = 0$  が成り立つから (iii) が成り立つ. さらに  $x' + 2y' + z' = 0$  のとき,  $(x + x') + 2(y + y') + (z + z') = (x + 2y + z) + (x' + 2y' + z') = 0$  なので (ii) も成り立つ.

(7)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \notin W$  だから (ii) は不成立.

(8) (6) と同じようにしてチェックできるが, (6)(8) はいずれも同次形連立一次方程式の解空間なので部分空間 (教科書 命題 15.4).

(9) 非同次形連立一次方程式  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 4y + 3z = 1 \\ x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$  は  $x = y = z = 0$  を解に持たないので,  $\mathbf{0} \notin W$ . つまり

(i) は不成立.

(10) まず  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$  は解  $x = y = z = 0$  を持つから,  $\mathbf{0} \in W$ . また,  $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x - 4y + 3z = b \\ x - 3y + 3z = c \end{cases}$  が解

$x = x_0, y = y_0, z = z_0$  を持つとき,  $x = kx_0, y = ky_0, z = kz_0$  とすれば  $\begin{cases} x + 2y + 3z = ka \\ x - 4y + 3z = kb \\ x - 3y + 3z = kc \end{cases}$  の解にな

る. つまり  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in W$  のとき,  $\begin{bmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{bmatrix} \in W$  となるから, (iii) が成立. さらに,  $\begin{cases} x + 2y + 3z = a' \\ x - 4y + 3z = b' \\ x - 3y + 3z = c' \end{cases}$  が解

$x = x_1, y = y_1, z = z_1$  を持つとき,  $x = x_0 + x_1, y = y_0 + y_1, z = z_0 + z_1$  とすれば  $\begin{cases} x + 2y + 3z = a + a' \\ x - 4y + 3z = b + b' \\ x - 3y + 3z = c + c' \end{cases}$

の解になる. つまり,  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \in W$  のとき,  $\begin{bmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \end{bmatrix} \in W$  となるから, (ii) が成り立つ.

2 (1)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & 4 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  より,  $\mathbf{v} \notin W$ .  $\mathbf{w} \in W$ .

(3) 改  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 8 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 20 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 11 \\ 0 & 12 & -9 & -3 & 17 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 & 11/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$  より  $\mathbf{v} \in W$ .  $\mathbf{w} \notin W$ .

(4)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & -7 & -5 \\ -2 & 3 & -6 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & -4 & 2 & -14 \\ 0 & 7 & -12 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & -4 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -15 \\ 0 & -4 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

より  $\mathbf{v} \in W$ .

(5)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 27 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -7 \end{bmatrix} \text{より, } \mathbf{v} \notin W.$$

[3] (1)  $W_1$  は  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  を方向ベクトルとする直線, すなわち  $y = 3x$ . 同様に  $W_2$  は  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  を方向ベクトルとする直線  $y = -\frac{1}{2}x$ . 共通部分は  $\{\mathbf{0}\}$ . 和集合はこの2つの直線全体である.  $\mathbf{v}_1 \in W_1, \mathbf{v}_2 \in W_2$  の和  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \notin W_i (i = 1, 2)$  だから  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \notin W_1 \cup W_2$ . つまり  $W_1 \cup W_2$  は  $\mathbb{R}^2$  の部分空間ではない.

平面上のベクトル  $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$  に対して,  $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$  となる  $c_1, c_2$  は,  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$  の解なので,  $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p+2q}{7} \\ \frac{-3p+q}{7} \end{bmatrix}$  となる. つまりどんなベクトル  $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  も,  $\frac{p+2q}{7}\mathbf{v}_1 + \frac{-3p+q}{7}\mathbf{v}_2$  と表せるので, 和空間  $W_1 + W_2$  に属する. よって  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$  である. (図示はいずれも省略.)

(2)  $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in W_2$  となるための条件は,  $\begin{bmatrix} -1 & -4 & | & p \\ 1 & 0 & | & q \\ 0 & 1 & | & r \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & q \\ 0 & 1 & | & r \\ 0 & -4 & | & p+q \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & q \\ 0 & 1 & | & r \\ 0 & 0 & | & p+q+4r \end{bmatrix} \rightarrow$  より,  $p+q+4r=0$  である. これは  $W_1$  が平面  $x+y+4z=0$  であることを意味している. 図形的に見ると,  $W_1$  に属する元は  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  を用いて  $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2$  と表される元全体なので,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  と直交するベクトルすなわち外積ベクトル  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$  と直交している. ここからも  $W_1$  は平面  $x+y+4z=0$  とわかる. 同様に

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & p \\ -3 & 4 & | & q \\ 0 & 1 & | & r \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & q \\ 0 & 1 & | & r \\ 0 & 0 & | & 3p+q-4r \end{bmatrix}$  より,  $W_2$  は平面  $3x+y-4z=0$  となる. これは  $\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$  に直交する平面である.  $W_1 \cap W_2$  は, 2つの平面の共通部分なので,  $x+y+4z=0$  と  $3x+y-4z=0$  を連立させると,  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$  より,  $W_1 \cap W_2$  に属する元は  $k \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$  ( $k$  は実数) と表せる.

これは方向ベクトル  $\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$  の直線を表す. 図形的には  $W_1 \cap W_2$  に属する元は,  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4$  の両方と直

交するので, 外積ベクトル  $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4) = \begin{bmatrix} 8 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix}$  を方向ベクトルとする直線になる. 最後に, 和

空間は  $\mathbb{R}^3$  に一致する. なぜなら,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$  に対し,  $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 & 0 & | & p \\ 1 & 0 & -3 & 4 & | & q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & r \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 & | & q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & r \\ 0 & 0 & -2 & 8 & | & p+q+4r \end{bmatrix} \rightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & | & -3p+q+12r \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & r \\ 0 & 0 & 1 & -4 & | & -\frac{p+q+4r}{2} \end{bmatrix}$  となるので,  $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = -\frac{3p+q+12r}{2}\mathbf{a}_1 + r\mathbf{a}_2 - \frac{p+q+4r}{2}\mathbf{a}_3$  と表せることがわ

かる. よって  $\mathbb{R}^3$  のどんな元も  $W_1 + W_2$  に属する. 和集合  $W_1 \cup W_2$  が部分空間ではないことは, 例えば, 平面  $x+y+4z=0$  上のベクトル  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  と  $3x+y-4z=0$  上のベクトル  $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$  の和  $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$  が,  $x+y+4z=0$  上にも  $3x+y-4z=0$  上にもないことからわかる.