

数学演習第二 第3回 「ベクトル空間・部分空間」

(2017.10.25 実施)

【要点：教科書命題 15.2】 ベクトル空間 V の部分集合 W が V の部分空間であるための必要十分条件は次の3条件すべてを満たすことである；

(i) $\mathbf{0} \in W$. (ii) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$. (iii) $\mathbf{a} \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\mathbf{a} \in W$.

1 [部分空間の判定] 次のベクトル空間 \mathbb{R}^2 または \mathbb{R}^3 の部分集合 W が部分空間であるかどうかを判定せよ.

$$(1) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \right\}$$

$$(2) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \right\}$$

$$(3) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0 \right\}$$

$$(4) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \text{ は整数} \right\}$$

$$(5) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \text{ は全て } \geq 0 \right\}$$

$$(6) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \right\}$$

$$(7) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 \right\}$$

$$(8) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \end{array} \right\}$$

$$(9) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 4y + 3z = 1 \\ x - 3y + 3z = 1 \end{array} \right\}$$

$$(10) W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} \text{連立一次方程式} \\ \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x - 4y + 3z = b \\ x - 3y + 3z = c \end{cases} \\ \text{が解を持つ.} \end{array} \right\}$$

【要点】 数ベクトル空間 \mathbb{R}^m の元 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}$ に対して,

$$\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \rangle \ni \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 \mathbf{a}_1 + \dots + c_r \mathbf{a}_r = \mathbf{b} \text{ と表せる.}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{非同次連立一次方程式 } [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \mathbf{b} \text{ が解を持つ.}$$

$$\text{教科書 定理 8.4} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rank}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r] = \text{rank}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r | \mathbf{b}].$$

なお, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots$ が $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \rangle$ に属するかどうかを調べたければ, $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r | \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots]$ を行基本変形してその階数を同時に調べるのが早い.

2 [生成される部分空間] 次のそれぞれの部分空間 W に対して、与えられた v, w が W に属するか判定せよ。(演習書 問題 11.2.6(1)(3) 改 (4)(5))

$$(1) W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^2, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$(3) \text{ 改 } W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4, \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$(5) W = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

【要点】 ベクトル空間 V の 2 つの部分空間 W_1, W_2 に対し、

$$W_1, W_2 \text{ の共通部分 } W_1 \cap W_2 = \{v \in V \mid v \in W_1 \text{ かつ } v \in W_2\}$$

$$W_1, W_2 \text{ の和空間 } W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

は、いずれも V の部分空間となる (教科書命題 15.10, 命題 15.12) .

3 [和空間と共通部分]

(1) \mathbb{R}^2 の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 3x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2x \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

について、 $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, 和集合 $W_1 \cup W_2$, 和空間 $W_1 + W_2$ を図示せよ。また、和集合 $W_1 \cup W_2$ は部分空間でないことをチェックせよ。

(2) \mathbb{R}^3 の部分空間

$$W_1 = \left\langle a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

について、 $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, 和空間 $W_1 + W_2$ はそれぞれ \mathbb{R}^3 内のどのような図形になるか述べよ。また和集合 $W_1 \cup W_2$ は \mathbb{R}^3 の部分空間ではないことをチェックせよ。