平成 29 年度 数学演習第二 演習 第４回　微積：偏微分 [1]（偏微分，合成関数の微分）　解答例

2017 年 11 月 1 日 実施分

$\boxed{1}$ $f_x(x,y) := \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$, $f_y(x,y) := \lim_{k\to 0}\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$ がそれぞれの定義式である．
$f \in C^2(D)$ ならば，$f_{xy}(x,y) := (f_x)_y(x,y) = (f_y)_x(x,y) =: f_{yx}(x,y)$ $((x,y)\in D)$ に注意しておく．
$\boxed{\text{記号}}$ $f \in C^n(D)$ は，f が D で C^n 級の関数であることを表す．

(1) $f_x(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$，$f_y(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$，
$f_{xx}(x,y) = \dfrac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}$，$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$，$f_{yy}(x,y) = \dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$．

(2) $f_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}}$, $f_y(x,y) = \dfrac{2y}{\sqrt{x^2+2y^2}}$. $(x^2+2y^2)(f_x)^2 = x^2$ の両辺をそれぞれ x で偏微分すると，$2x(f_x)^2 + 2(x^2+2y^2)f_x\,f_{xx} = 2x$, $2(x^2+2y^2)f_x\,f_{xx} = 2x\{1-(f_x)^2\} = \dfrac{4xy^2}{x^2+2y^2}$ より，$f_{xx}(x,y) = \dfrac{2xy^2}{(x^2+2y^2)^2 f_x} = \dfrac{2y^2}{(x^2+2y^2)^{3/2}}$ を得る．同様にして，$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{-2xy}{(x^2+2y^2)^{3/2}}$, $f_{yy}(x,y) = \dfrac{2x^2}{(x^2+2y^2)^{3/2}}$ がわかる．

(3) $f(x,y) = \dfrac{\log_e y}{\log_e x}$ より，$f_x(x,y) = -\dfrac{\log y}{x(\log x)^2}$，$f_y(x,y) = \dfrac{1}{y\log x}$，$f_{xx}(x,y) = \dfrac{\log y}{x^2(\log x)^2} + \dfrac{2\log y}{x^2(\log x)^3}$，
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\dfrac{1}{xy(\log x)^2}$，$f_{yy}(x,y) = -\dfrac{1}{y^2\log x}$．

(4) $f_x(x,y) = -\dfrac{1}{y}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$，$f_y(x,y) = \dfrac{x}{y^2}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$，$f_{xx}(x,y) = -\dfrac{1}{y^2}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$，
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{1}{y^2}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{x}{y^3}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$，$f_{yy}(x,y) = -\dfrac{2x}{y^3}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x^2}{y^4}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$．

(5) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき，$(x^2+y^2)f = xy(x^2-y^2)$ の両辺をそれぞれ x で偏微分すると，$2xf + (x^2+y^2)f_x = y(x^2-y^2)+2x^2y$, $(x^2+y^2)f_x = \dfrac{\{y(x^2-y^2)+2x^2y\}(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ より，$f_x(x,y) = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ が従う．同様にして，$f_y(x,y) = \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ も得られる．また，$f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$ は定義から容易にわかる．次に，$(x,y)\neq(0,0)$ のとき，$(x^2+y^2)^2 f_x = y(x^4+4x^2y^2-y^4)$ の両辺をそれぞれ x で偏微分すると，$4x(x^2+y^2)f_x + (x^2+y^2)^2 f_{xx} = 4xy(x^2+2y^2)$, $(x^2+y^2)^3 f_{xx} = 4xy\{(x^2+2y^2)(x^2+y^2)-(x^4+4x^2y^2-y^4)\}$ より，$f_{xx}(x,y) = \dfrac{4xy^3(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$ を得る．同様にして，$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}$, $f_{yy}(x,y) = -\dfrac{4x^3y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ を知る．そして，$f_x(x,0) = 0 = f_x(0,0)$ から，$f_{xx}(0,0) = 0$ や，$f_y(0,y) = 0 = f_y(0,0)$ より，$f_{yy}(0,0) = 0$ は容易に確かめられる．更に，$f_x(0,y) = -y$ から，$f_{xy}(0,0) = -1$ で，$f_y(x,0) = x$ より，$f_{yx}(0,0) = 1$ が導かれる．よって，$f(x,y)$ は $(0,0)$ の近傍で C^2 級でない．$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ だが，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xx}(x,y)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{yy}(x,y)$ はいずれも存在しない (平面の極座標を使えば示せる)．(5) の $f(x,y)$ はイタリアの数学者ペアノ (Giuseppe Peano, 1858–1932) の有名な一例である．

$\boxed{2}$ 合成関数の微分に関する連鎖律 $\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$ を適用する解答例を与える．

(1) $f_x(x,y) = \dfrac{(y/x)_x}{1+(y/x)^2} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{(y/x)_y}{1+(y/x)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\varphi'(t) = 2$, $\psi'(t) = -2t$ より，
$g'(t) = f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) = \dfrac{-(1-t^2)\cdot 2 + 2t(-2t)}{(2t)^2+(1-t^2)^2} = -\dfrac{2}{t^2+1}$.
(実は，$\mathrm{Tan}^{-1}u + \mathrm{Tan}^{-1}(1/u) = \pm\pi/2$ $(u \gtrless 0)$, $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2t}{1-t^2} = \pi + 2\,\mathrm{Tan}^{-1}t$ $(t<-1)$, $2\,\mathrm{Tan}^{-1}t$ $(|t|<1)$, $-\pi+2\,\mathrm{Tan}^{-1}t$ $(t>1)$ から，$g(t) = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1-t^2}{2t}\right) = \pm\pi/2 - 2\,\mathrm{Tan}^{-1}t$ $(t \gtrless 0)$ である．)

(2) $f_x(x,y) = \dfrac{(1+x^2+3y^2)_x}{1+x^2+3y^2} = \dfrac{2x}{1+x^2+3y^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{(1+x^2+3y^2)_y}{1+x^2+3y^2} = \dfrac{6y}{1+x^2+3y^2}$, $\varphi'(t) = 2t$, $\psi'(t) = e^t$ より，$g'(t) = \dfrac{2(t^2+1)\cdot 2t + 6e^t\cdot e^t}{1+(t^2+1)^2+3(e^t)^2} = \dfrac{4t^3+4t+6e^{2t}}{t^4+2t^2+2+3e^{2t}}$.

$\boxed{3}$ 合成関数の微分に関する連鎖律 $\dfrac{\partial z}{\partial *} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial *} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial *}$ $(* = u \text{ or } v)$ を適用する解答例を与える．

(1) $f(x,y) = y^x = e^{x\log y}$ だから, $f_x(x,y) = y^x \log y$, $f_y(x,y) = xy^{x-1}$. さらに $\varphi_u(u,v) = -v/(u^2)$, $\varphi_v(u,v) = 1/u$, $\psi_u(u,v) = 2u$, $\psi_v(u,v) = 2v$ だから, $z_u(u,v) = f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))\varphi_u(u,v) + f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))\psi_u(u,v)$
$= v(u^2+v^2)^{(v/u)-1}\left\{-\dfrac{u^2+v^2}{u^2}\log(u^2+v^2)+2\right\}$, $z_v(u,v) = \dfrac{v^2}{u}(u^2+v^2)^{(v/u)-1}\left\{\dfrac{u^2+v^2}{v^2}\log(u^2+v^2)+2\right\}$.
ただし, $z(u,v) = (u^2+v^2)^{v/u}$ を u, v でそれぞれ偏微分することもできる．

(2) $f_x(x,y) = \dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y(x,y) = -\dfrac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$, $\varphi_u(u,v) = \cos v$, $\varphi_v(u,v) = -u\sin v$, $\psi_u(u,v) = \sin v$, $\psi_v(u,v) = u\cos v$ より，$z_u(u,v) = \dfrac{4\cos v\sin^2 v}{u}\cos v + \dfrac{-4\cos^2 v\sin v}{u}\sin v = 0$ と，
$z_v(u,v) = \dfrac{4\cos v\sin^2 v}{u}(-u\sin v) + \dfrac{-4\cos^2 v\sin v}{u}(u\cos v) = -4\cos v\sin v$ を得る．
ただし, $z(u,v) = \cos^2 v - \sin^2 v = \cos 2v$ を u, v でそれぞれ偏微分する方が簡単である．

$\boxed{4}$ (1) $\dfrac{\partial x}{\partial u} = 3u^2$，$\dfrac{\partial x}{\partial v} = 6v$，$\dfrac{\partial y}{\partial u} = 6u$，$\dfrac{\partial y}{\partial v} = 3v^2$，より，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} 3u^2 & 6v \\ 6u & 3v^2 \end{bmatrix} = 9uv(uv-4)$.

(2) $\dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos^3 t$，$\dfrac{\partial x}{\partial t} = -3r\cos^2 t\sin t$，$\dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin^3 t$，$\dfrac{\partial y}{\partial t} = 3r\sin^2 t\cos t$，より，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)} = 3r\sin^2 t\cos^2 t$.

$\boxed{5}$ $z = f(x,y)$ とする．

(1) $f_x = -\dfrac{2y}{x} + \dfrac{1}{y}$ より，$f_x(1,1) = -1$．$f_y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{y^2}$ より，$f_y(1,1) = 1$．よって求める接平面の方程式は
$z - 3 = -(x-1) + (y-1)$ を整理して $x - y + z = 3$．また求める法線の方程式は $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$.

(2) $f_x = \dfrac{4x}{2x^2-y-6}$ より，$f_x(2,1) = 8$．$f_y = \dfrac{-1}{2x^2-y-6}$ より，$f_y(2,1) = -1$．よって求める接平面の方程式は
$z = 8(x-2) - (y-1)$ を整理して $8x - y - z = 15$．また求める法線の方程式は $\dfrac{x-2}{8} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$.

$\boxed{6}$ 一般に，3 種類の極限には論理的な関係はないので，(a) の極限または (b) の極限が存在しないことから，(c) の極限が存在しないとは云えないし，(c) の極限が存在しても，(a) の極限や (b) の極限が存在すると結論付けられない．

(1) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} -1 = -1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} x = 0$. この場合, $f(x,y)$ の x 軸に沿って原点に近づいた極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$ と y 軸に沿って原点に近づいた極限 $\displaystyle\lim_{y\to 0} f(0,y) = -1$ が異なるので (c) の極限は存在しない．

(2) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0 = \lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ はよいだろう．(c) の極限を調べるには本問では平面の極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r \geqq 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ が有効で，このとき $(x,y) \to (0,0)$ は $r \to 0$ と同じなので，あたかも（θ をパラメータと見なして）r の 1 変数関数のように扱える．実際，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと，$f(x,y) = \cos\theta\sin\theta = (1/2)\sin 2\theta$ は区間 $[-1/2, 1/2]$ の任意の値を取り得るから，(c) の極限は存在しない．

(3) $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leqq 1$ により $|f(x,y)| \leqq |x|$ なので，はさみうちの原理により，
$\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0 = \lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ が得られる．

(4) $|f(x,y)| \leqq |x|$ $(y \neq 0)$ から，$\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ がわかる．一方，$x \neq 0$ として，例えば $y = \dfrac{1}{n\pi}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ を考えると，$n \to \infty$ ならば，$0 \neq y \to +0$ で，$f(x,y) = (-1)^n x \in \{\pm x\}$ なので，$\displaystyle\lim_{y\to 0} f(x,y)$ は存在しない．よって，(b) の極限も存在しない．

$\boxed{\text{補足}}$ $\boxed{1}$ (5) などを回顧すれば，(a) の極限や (b) の極限は自然に現れることがわかる．実際，

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)}{hk}\right) = \lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right) = -1$$
$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)}{hk}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right) = 1$$

よって，$f(x,y) = xy\,g(x,y)$, $g(tx,ty) = g(x,y)$ $(t \neq 0)$, $g(1,0) \neq g(0,1)$ をみたす g であれば，$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ は成り立つ．但し，$g(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ から $(0,0)$ を除いた $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ で定義されていて，$f(0,0) = 0$ とする．