

平成29年度 数学演習第二

演習 第4回 微積：偏微分 [1] (偏微分, 合成関数の微分)

2017年11月1日 実施

1 次の関数 $f(x, y)$ について, 1 次と 2 次の偏導関数 ($f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$) を全て求めよ.

$$(1) f(x, y) = \log(x^2 + y^2) \quad (2) f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2} \quad (3) f(x, y) = \log_x y$$
$$(4) f(x, y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad (5) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

2 $f(x, y)$ に 1 変数関数 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ を合成した 1 変数関数 $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ の導関数 $g'(t)$ を求めよ (演習書 問題 5.2.1 (1) 他).

$$(1) f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \varphi(t) = 2t, \psi(t) = 1 - t^2$$
$$(2) f(x, y) = \log_e(1 + x^2 + 3y^2), \varphi(t) = t^2 + 1, \psi(t) = e^t$$

3 $f(x, y)$ に 2 変数関数 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ を合成した 2 変数関数 $z(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ の偏導関数 z_u, z_v をそれぞれ求めよ.

$$(1) f(x, y) = y^x, \varphi(u, v) = \frac{v}{u}, \psi(u, v) = u^2 + v^2$$
$$(2) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \varphi(u, v) = u \cos v, \psi(u, v) = u \sin v$$

4 次の変換のヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)}$ を求めよ.

$$(1) x = u^3 + 3v^2, y = v^3 + 3u^2 \quad (2) x = r \cos^3 t, y = r \sin^3 t$$

5 次の曲面の, 与えられた点における接平面と法線の方程式を求めよ.

$$(1) z = \frac{2y}{x} + \frac{x}{y} \quad (1, 1, 3) \quad (2) z = \log(2x^2 - y - 6) \quad (2, 1, 0)$$

6 次の 2 変数関数 $f(x, y)$ について, 3 種類の極限值

$$(a) \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad (c) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

がそれぞれ存在するか否かを調べよ. つまり, 存在すれば, その値を計算し, そうでなければ, その理由を述べよ.

$$(1) f(x, y) = \frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (2) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$(3) f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4) f(x, y) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{y}\right) & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$$