2017 数学演習第二 第 5 回「一次独立・一次従属，基底と次元」解答例

$\boxed{1}$ (1) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 8 & -2 & -7 \\ 2 & -8 & 17 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 22 & -55 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = 2 < 3$ だから，一次従属で，非自明な一次関係式は $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1 + \frac{5}{2}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$.（$3\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ も可.）

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より，

$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4] = 3 < 4$ だから，一次従属で，非自明な一次関係式は $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$.

（なお，一般に，$n+1$ 個以上の n 項列ベクトルは必ず一次従属である.）

(3) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4] = 3 < 4$ だから，一次従属で，非自明な一次関係式は $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$.（$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ も可.）

(4) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4] = 4$ だから，一次独立.

$\boxed{2}$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & k \\ 0 & k & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & k-2 \\ 0 & k & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & k-2 \\ 0 & 0 & -k^2+2k+8 \end{bmatrix}$. 一次従属であるためには，これの階数が 3 より小さい，つまり $-k^2+2k+8=0$ となればよいので，$k=-2,4$.

$\boxed{3}$ (1) $c_1(-\boldsymbol{v}_1+8\boldsymbol{v}_2+2\boldsymbol{v}_3)+c_2(3\boldsymbol{v}_1-2\boldsymbol{v}_2-8\boldsymbol{v}_3)+c_3(-6\boldsymbol{v}_1-7\boldsymbol{v}_2+17\boldsymbol{v}_3)=\boldsymbol{0}$ とすると，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ で整理すれば，$(-c_1+3c_2-6c_3)\boldsymbol{v}_1+(8c_1-2c_2-7c_3)\boldsymbol{v}_2+(2c_1-8c_2+17c_3)\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次独立だから，$-c_1+3c_2-6c_3=8c_1-2c_2-7c_3=2c_1-8c_2+17c_3=0$. これは連立一次方程式 $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 8 & -2 & -7 \\ 2 & -8 & 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$ である. $\boxed{1}$(1) でみたように係数行列の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ だから，この連立一次方程式には，たとえば，$c_1=\frac{3}{2}, c_2=\frac{5}{2}, c_3=1$ という非自明な解がある. よって与えられた 3 つのベクトルは一次従属である. 非自明な一次関係式は $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1+\frac{5}{2}\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$.（$3\boldsymbol{a}_1+5\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$ も可.）

(2) 同様に考えると $c_1(-\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_4)+c_2(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_4)+c_3(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_4)+c_4(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_4)=\boldsymbol{0}$ は連立一次方程式 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$ と同値. $\boxed{1}$(4) でみたように係数行列の階数は 4 なのでこの連立一次方程式は自明な解のみを持つ. よって与えられたベクトルは一次独立である.

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^n$ の基底は n 個の一次独立な n 項列ベクトルからなる. $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ が $\mathbb{R}^n$ の基底になるかどうかは**教科書 命題 7.14** にあるように $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ が正則行列であるか（行列式が 0 でないか）調べるのが簡単である. これを使えば，$\mathcal{E}$ は個数が 3 より小さいので基底にならず，$\mathcal{G}$ も行列式が 0 なので基底にならない. $\mathcal{F}$ は行列式が 2，$\mathcal{H}$ も行列式が 4 になるので，いずれも $\mathbb{R}^3$ の基底となる.

$\boxed{5}$ W_1 に属する元は $\begin{bmatrix} -2y-3z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表せるので，$\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ は W_1 を生成

する．一次独立であることもすぐにチェックできるので，これが W_1 の基底である．従って，$\dim W_1 = 2$ である．

W_2 については，係数行列を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので，W_2 の元は $\begin{bmatrix} -3k \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$ と表せる．つまり $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ が W_2 を生成し，(零ベクトルではないので）一次独立．よってこれが W_2 の基底となる．従って，$\dim W_2 = 1$ である．

W_3 については，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ x & y & z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & y-x & z-x \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4x-5y+z \end{bmatrix}$ より，$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \, 4x - 5y + z = 0 \right\}$ となり，その元は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ -4x+5y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ と表せる．よって $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$ が W_3 を生成し，一次独立であることも簡単にチェックできるので，これが W_3 の基底である．従って，$\dim W_3 = 2$ である．

$\boxed{6}$ (1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -14 & -28 & -12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属で，非自明な一次関係式 $3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ が成り立つことがわかる．

(2) (1) から，$\mathcal{E}$ は基底にならない．他方，非自明な一次関係式を使うと，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = (c_1 - 3c_3)\boldsymbol{a}_1 + (c_2 + 2c_3)\boldsymbol{a}_2 + c_4\boldsymbol{a}_4$ と書き直せるので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は W を生成する．同様に考えると $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ はいずれも W を生成することがわかる．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のどの 2 つ $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j$ をとっても $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_4$ は一次独立であることがチェックできるので，$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ はいずれも W の基底である．

(3) 基底の定義に従って次の 3 つのことをチェックする．(i) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が一次独立．(ii) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W に属す．(iii) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W を生成する．まず (i) は，$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ -1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & -4 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $\mathrm{rank}[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = 3$ だから成立．次に (ii) は，$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4 | \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & -4 & 10 \end{array}\right] \to$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 14 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -14 & -12 & -13 & -12 & -26 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4)$，$\boldsymbol{b}_2 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{b}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$ とそれぞれ表せることからわかる．(iii) は逆に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ が $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の一次結合で表せることを示せばよい．これは $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 9 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & -4 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 10 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 14 & -7 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 10 & -5 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right] \to$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{a}_1 = -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_2 = 6\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_4 = -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$ と表せることからわかる．

［注意］: (i) は $U = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ が 3 次元で $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ がその基底であることを意味している．(ii) は $U \subset W$，(iii) は $U \supset W$ を意味している．**教科書 命題 18.6** に注意すれば，(ii),(iii) のどちらか一方が言えれば，(i) と合わせて，$U = W$ であることが言え，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W の基底とわかる．