数学演習第二 (演習 第６回) 略解　　微積： 偏微分 $[2]$ （テーラーの定理, 極値）

$\boxed{1}$ 次の 2 変数関数のマクローリン展開の公式を利用する：

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{1}{2}\{f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\} \\ &+\frac{1}{3!}\{f_{xxx}(0,0)x^3+3f_{xxy}(0,0)x^2y+3f_{xyy}(0,0)xy^2+f_{yyy}(0,0)y^3\}+\cdots \end{aligned} \tag{a}$$

(1) $f(x,y)=\cos(x+y^2)$ より，

$$\begin{aligned} &f_x=-\sin(x+y^2),\ f_y=-2y\sin(x+y^2), \\ &f_{xx}=-\cos(x+y^2),\ f_{xy}=-2y\cos(x+y^2),\ f_{yy}=-4y^2\cos(x+y^2)-2\sin(x+y^2), \\ &f_{xxx}=\sin(x+y^2),\ f_{xxy}=2y\sin(x+y^2),\ f_{xyy}=4y^2\sin(x+y^2)-2\cos(x+y^2), \\ &f_{yyy}=8y^3\sin(x+y^2)-12y\cos(x+y^2). \end{aligned}$$

点 $(0,0)$ での値を (a) に代入して,

$$\cos(x+y^2)=1-\frac{1}{2}x^2-xy^2+\cdots$$

【別解】 1 変数のマクローリン展開の公式

$$g(t)=g(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^k+\cdots$$

を利用する．ここでは，特に $n=2$, $t=x+y^2$, $g(t)=\cos t$ として適用し，2 変数多項式として 4 次以上の項を無視して展開し, 昇べきの順に並べると

$$\cos(x+y^2)=\cos t=1-\frac{1}{2!}t^2+\cdots=1-\frac{1}{2}(x+y^2)^2+\cdots=1-\frac{1}{2}x^2-xy^2+\cdots$$

(2) (a) の展開式を利用するのもよいが, $f(x,y)=a^{x+2y}=e^{(x+2y)\log a}$ より, 指数関数のマクローリン展開

$$e^t=1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\cdots$$

を用いる方が易しい．つまり，$t=(\log a)(x+2y)$ を代入すると

$$a^{x+2y}=1+(\log a)(x+2y)+\frac{(\log a)^2}{2}(x^2+4xy+4y^2)+\frac{(\log a)^3}{6}(x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3)+\cdots$$

因みに，f の 3 次までの偏導関数は次の通りである：

$$\begin{aligned} &f_x=(\log a)a^{x+2y},\ f_y=2(\log a)a^{x+2y},\ f_{xx}=(\log a)^2a^{x+2y},\ f_{xy}=2(\log a)^2a^{x+2y},\ f_{yy}=4(\log a)^2a^{x+2y}, \\ &f_{xxx}=(\log a)^3a^{x+2y},\ f_{xxy}=2(\log a)^3a^{x+2y},\ f_{xyy}=4(\log a)^3a^{x+2y},\ f_{yyy}=8(\log a)^3a^{x+2y}. \end{aligned}$$

(3) (2) と同様に，ここでも (a) を使うよりも，対数関数のマクローリン展開

$$\log(x+1)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots$$

を用いる方が簡単になる．すなわち，

$$y\,\log(x+1)=y\left(x-\frac{1}{2}x^2+\cdots\right)=xy-\frac{1}{2}x^2y+\cdots$$

因みに，f の 3 次までの偏導関数は次の通りである：

$$\begin{aligned} &f_x=\frac{y}{x+1},\ f_y=\log(x+1),\ f_{xx}=\frac{-y}{(x+1)^2},\ f_{xy}=\frac{1}{x+1},\ f_{yy}=0, \\ &f_{xxx}=\frac{2y}{(x+1)^3},\ f_{xxy}=\frac{-1}{(x+1)^2},\ f_{xyy}=f_{yyy}=0. \end{aligned}$$

【参考】 x,y の n 次多項式 $P(x,y)$ が $f(x,y)$ の n 次のマクローリン展開であることと

$$f(x,y)=P(x,y)+o\big((\sqrt{x^2+y^2})^n\big)\quad((x,y)\to(0,0)) \tag{b}$$

が成り立つことは同値である．この事実は, (a) で定義された $f(x,y)$ の n 次マクローリン展開が, (a) を使わなくても, (b) をみたす n 次多項式 $P(x,y)$ を見つけられれば, $P(x,y)$ が $f(x,y)$ の n 次マクローリン展開となることを示している．これより上述のような (a) を用いないマクローリン展開の導出が許される．

$\boxed{2}$ (3), (4), (5) は $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, $D(0,0)=0$ となる問題である．ここで

$$D(a,b) := f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \{f_{xy}(a,b)\}^2$$

とおいた．極値の定義が以下のように与えられることに注意して, $f(0,0)$ が極値かどうか判定する．

$f(a,b)$ が極大値 (または極小値) であるとは, (a,b) に十分近い (a,b) 以外の全ての点で, 不等式 $f(x,y) < f(a,b)$ (または $f(x,y) > f(a,b)$) が成り立つときをいう．【注】 この定義において, $<$ ($>$) を $\leq$ ($\geq$) で置き換えて, 広義の極大値 (広義の極小値) を定義することがある．

(1) $f(x,y)=\sin x\sin y$. $f_x=\cos x\sin y$, $f_y=\sin x\cos y$ より, $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$. $f_{xx}=-\sin x\sin y$, $f_{xy}=\cos x\cos y$, $f_{yy}=-\sin x\sin y$ より, $D(0,0)=-1<0$. よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない．

(2) $f(x,y)=a^{x+y}(x^2+y^2)$. $f_x=a^{x+y}((x^2+y^2)\log a+2x)$, $f_y=a^{x+y}((x^2+y^2)\log a+2y)$ より, $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$. $f_{xx}=a^{x+y}((x^2+y^2)(\log a)^2+4x\log a+2)$, $f_{xy}=a^{x+y}((x^2+y^2)(\log a)^2+2x\log a+2y\log a)$, $f_{yy}=a^{x+y}((x^2+y^2)(\log a)^2+4y\log a+2)$ より, $D(0,0)=4>0$, $f_{xx}(0,0)=2>0$. よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値を取る．

(3) $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4=(x-y^2)^2$. $(x,y)\neq(0,0)$ が $x=y^2$ を満たすとき $f(x,y)=0=f(0,0)$ となるので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない．

(4) $f(x,y)=2x^3+2y^3+x^2+2xy+y^2$. $f(x,y)=2(x+y)(x^2-xy+y^2)+(x+y)^2=(x+y)(2x^2-2xy+2y^2+x+y)$ より $f(x,-x)=0$. よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない．

(5) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$. $x\neq0$ のとき $f(x,x)=2x^4>0=f(0,0)$ であるが, 十分小さな y に対して $f(0,y)=y^2(y^2-2)<0$ なので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない．

$\boxed{3}$ 以下の極値を取るための十分条件を利用する $f(x,y)$ が (a,b) の近くで, 連続な 2 階偏導関数を持ち, $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ とする．さらに, $D(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\{f_{xy}(a,b)\}^2$ とおくとき,

(i) $D(a,b)>0$ のとき, $\begin{cases} f_{xx}(a,b)>0 \Longrightarrow f(a,b) \text{ は極小値,} \\ f_{xx}(a,b)<0 \Longrightarrow f(a,b) \text{ は極大値.} \end{cases}$ (極値を取るための十分条件)

(ii) $D(a,b)<0$ のとき, $f(a,b)$ は極値でない．

(iii) $D(a,b)=0$ のとき, 極値を取るか取らないかのいずれか一方であるが, この方法では判定できない．($\boxed{2}$参照)

(1) $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x-4y$. $\begin{cases} f_x=2x-y-1=0 \\ f_y=-x+2y-4=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=(2,3)$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx}=2$, $f_{xy}=-1$, $f_{yy}=2$ より, $D(2,3)=f_{xx}(2,3)f_{yy}(2,3)-f_{xy}(2,3)^2=2\cdot2-(-1)^2=3>0$. よって, $f(x,y)$ は $(2,3)$ で極小値 $f(2,3)=-7$ を取る．

(2) $f(x,y)=x^4-2x^3+x^2+y^2$. $\begin{cases} f_x=4x^3-6x^2+2x=2x(x-1)(2x-1)=0 \\ f_y=2y=0 \end{cases}$ より $(x,y)=(0,0)$, $(1,0)$, $(1/2,0)$ (この 3 点が極値を与える候補). $f_{xx}=12x^2-12x+2$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=2$ より, $D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=4(6x^2-6x+1)$. $D(0,0)=D(1,0)=4>0$, $f_{xx}(0,0)=f_{xx}(1,0)=2>0$ より, $f(x,y)$ は $(0,0)$, $(1,0)$ で極小値 $f(0,0)=f(1,0)=0$ を取る．一方, $D(1/2,0)=-2<0$ より $f(x,y)$ は $(1/2,0)$ では極値を取らない．

(3) $f(x,y)=xy(x+y-1)$. $\begin{cases} f_x=y(2x+y-1)=0 \\ f_y=x(x+2y-1)=0 \end{cases}$ を解いて $(x,y)=(0,0),(1,0),(0,1),(1/3,1/3)$ (この 4 点が極値を与える候補). $f_{xx}=2y$, $f_{xy}=2x+2y-1$, $f_{yy}=2x$ より, $D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=4xy-(2x+2y-1)^2$. $D(0,0)=D(1,0)=D(0,1)=-1<0$ より, $f(x,y)$ は $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ で極値を取らない． 一方 $D(1/3,1/3)=1/3>0$, $f_{xx}(1/3,1/3)=2/3>0$ より, $f(x,y)$ は $(1/3,1/3)$ で極小値 $f(1/3,1/3)=-1/27$ を取る．

(4) $f(x,y)=x^3+2x^2+xy+y^2$. $\begin{cases} f_x=3x^2+4x+y=0 \\ f_y=x+2y=0 \end{cases}$ を解いて $(x,y)=(0,0),(-7/6,7/12)$ (この 2 点が極値を与える候補). $f_{xx}=6x+4$, $f_{xy}=1$, $f_{yy}=2$ より, $D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=12x+7$. $D(0,0)=7>0$, $f_{xx}(0,0)=4>0$ より, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0)=0$ を取る．一方, $D(-7/6,7/12)=-7<0$, より, $f(x,y)$ は $(-7/6,7/12)$ で極値を取らない．

(5) $f(x,y)=\sin x+\cos y$. $\begin{cases} f_x=\cos x=0 \\ f_y=-\sin y=0 \end{cases}$ を解いて $(x,y)=(\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi l)$ $(k\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z})$. $f_{xx}=-\sin x$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=-\cos y$ より, $D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=\sin x\cos y$. $(\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi l)$ (k, l は共に奇数) においては $D(\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi l)=1>0$, $f_{xx}(\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi l)=1>0$ より, $f(x,y)$ は極小値 $f(\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi l)=-2$ を取る．また, $(\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi l)$ (k, l は共に偶数) においては $D(\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi l)=1>0$, $f_{xx}(\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi l)=-1<0$ より, $f(x,y)$ は極大値 $f(\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi l)=2$ を取る．一方, $(\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi l)$ (k:偶数, l:奇数) or (k:奇数, l:偶数) においては $D(\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi l)=-1<0$ より, $f(x,y)$ は極値を取らない．