2017 年度 数学演習第二 第 7 回「座標，行列の零空間・列空間・行空間」解答例

$\boxed{1}$ (1) $\boldsymbol{b}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ より，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$． $\boldsymbol{b}_1 = 1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{b}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{b}_3$ より，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$． $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}$ は，非同次形連立一次方程式 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_1$ を解く．拡大係数行列 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 | \boldsymbol{b}_1]$ を簡約化するか，$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ を求めて左から両辺に掛ける．$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$． (2) $\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{a}_1 + q\boldsymbol{a}_2 + r\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} p+q \\ p+q+r \\ p+r \end{bmatrix}$ だから，非同次形連立一次方程式 $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+q \\ p+q+r \\ p+r \end{bmatrix}$ を解く．拡大係数行列 $\left[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \left| \begin{matrix} p+q \\ p+q+r \\ p+r \end{matrix} \right.\right]$ を簡約化するか，$[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3]^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ を求めて左から掛ける．$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \dfrac{1}{4} \begin{bmatrix} p+2q-2r \\ p+2q+2r \\ p-2q+2r \end{bmatrix}$． 一方，$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{E}} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3][\boldsymbol{v}]_{\mathcal{E}} = \boldsymbol{v} = p\boldsymbol{a}_1 + q\boldsymbol{a}_2 + r\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} p+q \\ p+q+r \\ p+r \end{bmatrix}$．

$\boxed{2}$ $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2)$ となる c_1, c_2 をそれぞれ求めればよい．この 2 つの非同次形連立一次方程式を同時に扱う．$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 | \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} -3 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 10 & 20 & 10 \\ 0 & -8 & -16 & -8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ となるから，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in V$ であり，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$．

$\boxed{3}$ 行列 A の零空間，行空間，列空間の基底は A の簡約行列をもとに考える．零空間 $N(A)$ の次元は A の列数 $-\operatorname{rank} A$ であり，基底は，同次形連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を選べばよい．$\dim R(A) = \operatorname{rank} A$ であり，行基本変形で行空間は変わらないから，簡約行列の 1 行目から $\operatorname{rank} A$ 行目までを取ればよい．$\dim C(A) = \operatorname{rank} A$ であり，列空間の基底は簡約行列の主成分に対応する元の行列 A の列を取ればよい．

(1) $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$．よって $\dim N(M_1) = 2$ であり，基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$．
$\dim R(M_1) = 2$ であり，基底は $([1, 0, -1, -2], [0, 1, 2, 1])$．$\dim C(M_1) = 2$ であり，基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$．
(2) $\dim N({}^tM_1) = 2 - 2 = 0$ で，基底はなし．$\dim R({}^tM_1) = 2$ であり，基底は $([1, 1], [2, 3])$．$\dim C({}^tM_1) = 2$ であり，基底は $({}^t[1, 0, -1, -2], {}^t[0, 1, 2, 1])$．

(3) $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．$\dim N(M_2) = 2$ であり，基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$．
$\dim R(M_2) = 3$ であり，

基底は $([1, 0, -1, 0, 1], [0, 1, 0, 0, 2], [0, 0, 0, 1, 3])$．$\dim C(M_2) = 3$ であり，基底は $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$．

(4) ${}^tM_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\dim N({}^tM_2) = 1$ であり，基底は $\left(\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$．
$\dim R({}^tM_2) = 3$ であり基底は，$([1, 0, 0, -3], [0, 2, 0, 5], [0, 0, 2, 5])$．$\dim C({}^tM_2) = 3$ であり，

$\left(\begin{bmatrix}2\\1\\-2\\0\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\2\\-3\\-1\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\\2\end{bmatrix}\right)$. [**注意**] $C({}^tM_2)$ の基底は $R(M_2)$ の基底を転置したものでも可．$R({}^tM_2)$ の基底は $C(M_2)$ の基底を転置したものでも可．

$\boxed{4}$ (1) $A_1=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&2\\-1&-2&-1\\1&2&1\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ だから，$\dim W_1=\dim C(A_1)=2$ であり，基底は $\left(\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\\2\end{bmatrix}\right)$．また W_2 を生成する 3 つの列ベクトルは明らかに一次独立だから，$\dim W_2=3$であり，基底は $\left(\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$．$A=\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\1&2&1&0\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&1&1\end{bmatrix}$ より，$\dim W=\dim N(A)=2$ であり，基底は $\left(\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$．(2) $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}c_1+2c_2\\c_1+c_2\\-c_1-2c_2\\c_1+2c_2\end{bmatrix}\in W_1\cap W$ となる条件は，$\begin{cases}(c_1+2c_2)+(c_1+c_2)-(c_1+2c_2)=0\\(c_1+2c_2)+2(c_1+c_2)+(-c_1-2c_2)=0\end{cases}$ だから，$c_1+c_2=0$. よって $W_1\cap W$ の元は $c_1\boldsymbol{a}_1-c_1\boldsymbol{a}_2=c_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$ と表せることになるので，$\dim W_1\cap W=1$ であり，基底は $\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$．他方，$W_1+W=\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle$ であり，$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]\to\begin{bmatrix}1&2&1&2\\1&1&-1&-1\\-1&-2&1&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ から，$\dim(W_1+W)=3$ で基底は $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{v}_1)$ である．$\dim W_1=2,\dim W=2,\dim W_1\cap W=1,\dim(W_1+W)=3$だから次元公式を満たしている．(3) $W_1+W_2=\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\rangle$ であり，$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&1&1&1\\0&0&1&-1&-2\\0&0&1&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&2&3\\0&0&1&-1&-2\\0&0&0&2&2\end{bmatrix}$ となって階数 4 になるので，$\dim(W_1+W_2)=4$，つまり $W_1+W_2=\mathbb{R}^4$ である．基底は $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{a}_1)$ でもよいし，$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)$ としても可．また，$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2\in W_2$ となるための c_1,c_2 の条件は，$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1+2c_2\\c_1+c_2\\-c_1-2c_2\\c_1+2c_2\end{bmatrix}$ が解を持つこと．

$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&c_1+2c_2\\0&1&1&c_1+c_2\\0&0&1&-c_1-2c_2\\0&0&1&c_1+2c_2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&c_1+2c_2\\0&1&1&c_1+c_2\\0&0&1&-c_1-2c_2\\0&0&0&2c_1+4c_2\end{array}\right]$ より，求める条件は$2c_1+4c_2=0$，つまり $c_1=-2c_2$．よって $W_1\cap W_2$ の元は $-2c_2\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2=c_2\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$ と表せるので，$\dim W_1\cap W_2=1$ であり，基底は $(\boldsymbol{e}_2)$.