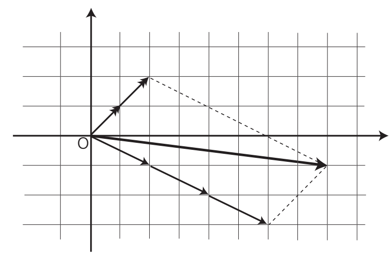
**数学演習第二 第7回 「座標，行列の零空間・列空間・行空間」**

(2017.11.22 実施)

---

**【要点】** $\mathcal{B}=(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_r)$ がベクトル空間 $V$ の基底であるとき, 任意の $\boldsymbol{v}\in V$ は $\boldsymbol{b}_1,\ \dots,\boldsymbol{b}_r$ の一次結合でただ一通りに表される.

$\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_r\boldsymbol{b}_r=[\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_r]\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\end{bmatrix}$ とするとき, 列ベクトル $\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する**座標**といい $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ と表す. $V$ が数ベクトル空間（の部分空間）の場合，座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ を求めるには, 非同次形連立一次方程式 $[\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_r]\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\end{bmatrix}=\boldsymbol{v}$ を解けばよい.




例えば $\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{B}=\left(\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$ に対し，$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}8\\-1\end{bmatrix}$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ は $\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2$ より $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ となる.

---

**1** [$\mathbb{R}^3$ **における座標**]

$\mathbb{R}^3$ の自然な基底 $\mathcal{E}=\left(\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ と，さらに次の2つの基底を考える.

$$\mathcal{A}=\left(\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right),\quad \mathcal{B}=\left(\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right)$$

(1) $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{E}}$，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}$，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{B}}$ をそれぞれ求めよ.

(2) $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$ が $\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathcal{E}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{E}}$ および基底 $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ をそれぞれ求めよ.

**2** [**部分空間における座標**]

$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V=\left\langle \boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}-3\\1\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}\right\rangle$ を考えると，$\mathcal{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ は $V$ の基底である．$\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}-1\\7\\5\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}-5\\5\\7\end{bmatrix}$ はいずれも $V$ に含まれることを示し，基底 $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}$，$[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}}$ をそれぞれ求めよ.

**【要点：教科書 19 章】** $m \times n$ 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix} = [\boldsymbol{c}_1 \cdots \boldsymbol{c}_n]$ に対し，

**零空間** $N(A)$　同次連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体のなす $\mathbb{R}^n$ の部分空間.

**行空間** $R(A)$　$\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_m$ で生成される $\mathbb{R}_n$ の部分空間.
（ただし，$\mathbb{R}_n$ は，$n$ 項行ベクトル全体のなすベクトル空間を表す.）

**列空間** $C(A)$　$\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ で生成される $\mathbb{R}^m$ の部分空間.

---

$\boxed{3}$ ［**行列の零空間・行空間・列空間**］　次の行列 $M_1, M_2$ を考える.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

このとき、次の行列の零空間，行空間，列空間の次元と基底をそれぞれ求めよ.

(1) $M_1$

(2) ${}^t M_1$

(3) $M_2$

(4) ${}^t M_2$

---

**【要点：共通部分と和空間に関する次元公式（教科書命題 19.10）】**
$W_1, W_2$ を $V$ の部分空間とするとき，次が成り立つ.

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

---

$\boxed{4}$ ［**共通部分と和空間**］　$\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W_1, W_2, W$ を以下の通りとする.

$$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

(1) $W_1, W_2, W$ の次元と基底をそれぞれ求めよ.

(2) $W_1 \cap W$，$W_1 + W$ の次元と基底をそれぞれ求め，【要点】で述べた次元公式が成り立っていることを確認せよ.

(3) $W_1 \cap W_2$，$W_1 + W_2$ の次元と基底をそれぞれ求めよ.