平成 29 年度 数学演習第二 演習第８回　微積：偏微分 [3]
（陰関数・ラグランジュの未定乗数法）

2017 年 12 月 6 日 実施

$\boxed{1}$ (演習書 問題 5.2.3) 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，$f(x,y)=0$ で定まる陰関数 $y=y(x)$ について，$y'(x)$, $y''(x)$ をそれぞれ x, y を用いて表せ．また，曲線 $f(x,y)=0$ 上の指定された点における接線の方程式を求めよ．

(0) $f(x,y)=2x^2-2xy+y^2-1 \quad (-\infty<x,\, y<\infty) \quad (0,1)$

(2) $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}-2 \quad (x \geqq 0,\ y \geqq 0) \quad (1,1)$

(4) $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad (x \neq 0) \quad (1,0)$

(5) $f(x,y)=xe^y-y+1 \quad (-\infty<x,\, y<\infty) \quad (-1,0)$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ のそれぞれの陰関数 $y=y(x)$ について，極値が存在すれば，それらをそれぞれ求めよ．また，$\boxed{1}$ のそれぞれの $f(x,y)$ について，曲線 $f(x,y)=0$ 上の点の y 座標の最大値・最小値が存在すれば，それらをそれぞれ求めよ．

$\boxed{3}$ 条件 $g(x,y):=x^2+y^4-3=0$ の下で，関数 $f(x,y)=xy$ の極値を調べる．
($A:=B$ は，A を B で定義する，プログラミング言語 Pascal の記号である．)

(1) Lagrange の未定乗数法を適用するために，３変数関数

$$F(x,y,\lambda):=f(x,y)+\lambda g(x,y)=xy+\lambda(x^2+y^4-3)$$

を導入し，条件 $g(x,y)=0$ の下で，$f(x,y)$ が或る点 (a,b) で極値をとると仮定して，
連立方程式

$$F_x(a,b,\alpha)=0,\ F_y(a,b,\alpha)=0,\ F_\lambda(a,b,\alpha)=0$$

を解き，極値をとる点 (a,b) の候補をすべて求めよ．

(2) 次に，それらの点 (a,b) の近くでの $g(x,y)=0$ より定まる陰関数 $x=\varphi(y)$ を考えて，f を 1 変数化した関数 $h(y):=f(\varphi(y),y)=y\,\varphi(y)$ の極値問題に帰着させる．そこで，$0=g(\varphi(y),y)=\{\varphi(y)\}^2+y^4-3$ の両辺をそれぞれ y で微分して，$\varphi'(b)$, $\varphi''(b)$ の値をそれぞれ計算せよ．

(3) (2) から，$h''(b)$ の値を求めて符号を調べ，微積の教科書の定理 2.3.2 を適用し，
$f(a,b)=h(b)$ が極値ならば，極大・極小の判定を行ない，その値も求めよ．

(4) $K:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | g(x,y)=0\}$ における $f(x,y)=xy$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{\text{2 変数関数の Lagrange の未定乗数法 (定理 4.4.2)}}$ D を $\mathbb{R}^2$ の領域（連結開集合）とし，$f(x,y)$, $g(x,y)$ は D で定義され，C^1 級であるとする．また，$(x,y,\lambda)\in D\times\mathbb{R}$ に対して，３変数関数

$$F(x,y,\lambda):=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

を定める．条件 $g(x,y)=0$ の下で，$f(x,y)$ が或る点 (a,b) で極値をとるとき，$g_x(a,b)\neq 0$ または $g_y(a,b)\neq 0$ であれば，或る実数 α が存在して

$$F_x(a,b,\alpha)=0,\ F_y(a,b,\alpha)=0,\ F_\lambda(a,b,\alpha)=0$$

が成立する．この λ を Lagrange 乗数 (Lagrange multiplier) ということがある．