数学演習第二（第 9 回）線形：線形写像，核と像　解答例　2017 年 12 月 13 日実施

$\boxed{1}$ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が線形写像なら, $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, かつ $f(\boldsymbol{x})$ のすべての成分は $x_1,\cdots,x_n$ の**一次式**で表されている.

(1) 任意の $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$, 任意の $k\in\mathbb{R}$ に対し, $f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\right)=f\left(\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}(x_1+y_1)+(x_2+y_2)\\(x_1+y_1)+(x_3+y_3)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_1+x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1+y_2\\y_1+y_3\end{bmatrix}=f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)+f\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\right)$, $f\left(k\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=f\left(\begin{bmatrix}kx_1\\kx_2\\kx_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}kx_1+kx_2\\kx_1+kx_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_1+x_3\end{bmatrix}$

$=kf\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)$ が成り立つので f は線形写像である.

(2) $f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ となるので, f は線形写像ではない.

(3) $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=3$, $f\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right)=12\neq 2f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$ より, f は線形写像ではない.

(4) 任意の $p(t),\,q(t)\in\mathbb{R}[t]_3$, 任意の $k\in\mathbb{R}$ に対し, $f(p(t)+q(t))=p'(t)+q'(t)=f(p(t))+f(q(t))$,
$f(kp(t))=kp'(t)=kf(p(t))$ が成り立つので f は線形写像である.

$\boxed{2}$ (2) 一般のベクトル $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ の一次結合で表す. $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=a_1\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ を a_1, a_2 について解き

$\begin{bmatrix}3&2&x_1\\2&3&x_2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&(3x_1-2x_2)/5\\0&1&(-2x_1+3x_2)/5\end{bmatrix}$ より $a_1=\dfrac{3x_1-2x_2}{5}$, $a_2=\dfrac{-2x_1+3x_2}{5}$ を得るので,

$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=f\left(\frac{3x_1-2x_2}{5}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+\frac{-2x_1+3x_2}{5}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)=\frac{3x_1-2x_2}{5}f\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right)+\frac{-2x_1+3x_2}{5}f\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{3x_1-2x_2}{5}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\frac{-2x_1+3x_2}{5}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(3x_1-2x_2)/5\\(-2x_1+3x_2)/5\\(3x_1-2x_2)/5\end{bmatrix}$$

となる.

(3) 同様に

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=a_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ を解いて, $\begin{bmatrix}1&1&1&x_1\\0&1&1&x_2\\0&0&1&x_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&x_1-x_2\\0&1&0&x_2-x_3\\0&0&1&x_3\end{bmatrix}$ より

$a_1=x_1-x_2$, $a_2=x_2-x_3$, $a_3=x_3$. したがって

$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=f\left((x_1-x_2)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+(x_2-x_3)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=(x_1-x_2)f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)+(x_2-x_3)f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)+x_3f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$=(x_1-x_2)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+(x_2-x_3)\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_2+x_3\\x_1-x_3\\x_2\end{bmatrix}$$

となる.

$\boxed{3}$ (ii) $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$.

(1) $\mathrm{Ker}\,f$ は、$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ であるようなベクトル $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 全体の成す $\mathbb{R}^3$ の部分空間, すなわち, 連立一次方程式

$\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ の解全体の成す部分空間（解空間）である．A の簡約行列は $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ なので, その解は,

任意の値をとるパラメータ c を用いて, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ と表される．よって, $\mathrm{Ker}\,f=\left\langle\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\rangle$ であるので, $\mathrm{Ker}\,f$ の

基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができて, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$ である.

(2) $\operatorname{Im} f$ は, ベクトル $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 全体の成す $\mathbb{R}^2$ の部分空間である. x_1, x_2, x_3 は任意の値をとることから, $\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となるため, $\operatorname{Im} f$ の基底は, この 3 つのベクトルの中から一次独立な最大個数の組を選べばよい. ここで, この 3 つのベクトルを列に並べた行列は A に他ならず, A の簡約行列の主成分は 1 列と 3 列にあるので, 3 つのベクトルから 1 番目と 3 番目を選んだ組, すなわち $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を $\operatorname{Im} f$ の基底として選ぶことができて, $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$ となる.

(3) 一般に, 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対し, f が単射 $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\} \Longleftrightarrow \dim(\operatorname{Ker} f) = 0$ であることと, f が全射 $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f := f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m \Longleftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = m$ である. よって, f は全射だが, 単射ではない.

(iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. (1) (ii) と同様に, A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので, 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は, 任意の値をとるパラメータ c を用いて, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表される. よって, $\operatorname{Ker} f = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ であるので, $\operatorname{Ker} f$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができて, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$ である.

(2) $\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle$ であり, A の簡約行列の主成分が 1 列目と 2 列目にあることから, $\operatorname{Im} f$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができる. よって, $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$ となる.

(3) f は単射でも全射でもない.

(v) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ なので, 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のみ, すなわち, $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ で, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$ である.

(2) $\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle$ で, A の簡約行列の主成分がすべての列にあることから, $\operatorname{Im} f$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができる. よって, $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$ となる.

(もしくは, $\operatorname{Im} f$ が $\mathbb{R}^3$ と一致することから, $\operatorname{Im} f$ の基底として, $\mathbb{R}^3$ の標準基底を選んでもよい.)

(3) f は単射かつ全射 (全単射) である.

$\boxed{4}$ $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ とおくと,

$$L(p(t)) = 2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) - (t+1)(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2) = (2a_0 - a_1) + (a_1 - 2a_2)t - 3a_3 t^2 - a_3 t^3$$

となるので, $p(t) \in \operatorname{Ker} L$ となるためには, $L(p(t)) = 0$ すなわち, $2a_0 - a_1 = 0$, $a_1 - 2a_2 = 0$, $a_3 = 0$ を満たす必要がある.

この連立一次方程式を解いて, $a_0 = c$, $a_1 = 2c$, $a_2 = c$, $a_3 = 0$ (c は任意), すなわち $p(t) = c(1 + 2t + t^2)$ を得る. よって, $\operatorname{Ker} L$ の基底として, $(1 + 2t + t^2)$ を選ぶことができて, $\dim(\operatorname{Ker} L) = 1$.

$\mathbb{R}[t]_3$ の基底として, $(1, t, t^2, t^3)$ をとると, $L(1) = 2$, $L(t) = -1 + t$, $L(t^2) = -2t$, $L(t^3) = -3t^2 - t^3$ であることから, $\operatorname{Im} L = \langle 2, -1 + t, -2t, -3t^2 - t^3 \rangle = \langle 1, t, -1 + t, 3t^2 + t^3 \rangle$. ここで, $-1 + t = -1 \times 1 + 1 \times t$ であることから, $\operatorname{Im} L$ の基底として, $(1, t, 3t^2 + t^3)$ をとることができて, $\dim(\operatorname{Im} L) = 3$.