数学演習第二（第 9 回）線形：線形写像，核と像

2017 年 12 月 13 日

$\boxed{1}$ 次の写像は線形写像になるか. 線形写像である場合にはそれを示し, 線形写像でない場合にはその理由を述べよ.

(1) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (**演習書問題 12.1.1** (3))

(2) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (**演習書問題 12.1.1** (4))

(3) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = (x_1)^2 + x_1 \cdot x_2 + (x_2)^2$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(4) $f(p(t)) = p'(t)$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}[t]_3 \to \mathbb{R}[t]_2$ (下の注釈を参照)

$\boxed{2}$ **演習書問題 12.1.2** 以下の問に答えよ.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ をみたす線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ に対し, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ.

(3) $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ をみたす線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ に対し,

$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ.

$\boxed{3}$ **演習書問題 12.2.4** $m \times n$ 行列 A を次のように与えるとき, 各々の A が定める $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ について以下の問に答えよ.

$$\text{(ii)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(iv)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{(v)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(1) $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と基底を求めよ. ($\{\mathbf{0}\}$ の場合, 基底はなく, 次元は 0 であることに注意せよ.)
(2) $\mathrm{Im}\, f$ の次元と基底を求めよ.
(3) f は単射であるかどうかを調べよ. また, f は全射であるかも調べよ.

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}[t]_3$ を 3 次以下の多項式全体からなる線形空間とする. 線形写像
$L : \mathbb{R}[t]_3 \to \mathbb{R}[t]_3$ (下の注釈を参照) を

$$L(p(t)) = 2p(t) - (t+1)p'(t) \qquad (p(t) \in \mathbb{R}[t]_3)$$

と定義するとき, L の核 $\mathrm{Ker}\, L$, 像 $\mathrm{Im}\, L$ の次元と基底をそれぞれ求めよ.

$\mathbb{R}[t]_n = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \mid a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ (n 次以下の実数係数 1 変数多項式全体) は, 一つの基底として $(1, t, t^2, \ldots, t^n)$ が取れるような, $n+1$ 次元ベクトル空間である. 線形代数学の教科書の例 14.5, 18.4 (ii) を参照のこと.