2017 年度　数学演習第二　中間統一試験　解説

[**1**]

(1) 偏導関数の定義より $f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \boxed{3x^2+3y^2}$.

(2) 合成関数の微分より

$$g'(t) = f_x\frac{dx}{dt} + f_y\frac{dy}{dt} = (3x^2+3y^2)e^t + (6xy+6y^2)(2t) = 3(e^{2t}+t^4)e^t + 12(t^2e^t+t^4)t$$

であるので求める解は，$g'(1) = \boxed{3e^3+15e+12}$.

【別解】$g(t) = f(e^t,t^2) = e^{3t}+3t^4e^t+2t^6$ から，$g'(t) = 3e^{3t}+(12t^3+3t^4)e^t+12t^5$ なので，$g'(1) = \boxed{3e^3+15e+12}$

[**2**]

(3) 積の微分を用いると

$$f_x = ye^{xy}\sin xy + e^{xy}(y\cos xy) = \boxed{ye^{xy}(\sin xy+\cos xy)}$$

(4) 積の微分を用いると

$$f_{xx} = y^2e^{xy}\sin xy + y^2e^{xy}\cos xy + y^2e^{xy}\cos xy - y^2e^{xy}\sin xy = \boxed{2y^2e^{xy}\cos xy}$$

(5) $f_y = xe^{xy}(\sin xy+\cos xy)$ であるので，合成関数の微分より

$$g_u = f_x\frac{\partial x}{\partial u} + f_y\frac{\partial y}{\partial u} = e^{xy}(\sin xy+\cos xy)(y\frac{\partial x}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u}) = e^{xy}(\sin xy+\cos xy)(yv+2ux)$$

ここで $(u,v)=(\pi,\pi)$ のとき $(x,y)=(\pi^2,0)$ であるので，上式より求める解は，

$$g_u(\pi,\pi) = e^0(\sin 0+\cos 0)(2\pi^3) = \boxed{2\pi^3}$$

【別解】 $g(u,v) = f(uv,u^2-v^2) = e^{uv(u^2-v^2)}\sin\{uv(u^2-v^2)\}$ から

$$\begin{aligned} g_u(u,v) &= \{v(u^2-v^2)+2u^2v\}[\sin\{uv(u^2-v^2)\}+\cos\{uv(u^2-v^2)\}]e^{uv(u^2-v^2)} \\ &= v(3u^2-v^2)[\sin\{uv(u^2-v^2)\}+\cos\{uv(u^2-v^2)\}]e^{uv(u^2-v^2)} \end{aligned}$$

なので，$g_u(\pi,\pi) = 2\pi^3\cos 0 = \boxed{2\pi^3}$.

[**3**]

(6) $f_x = \dfrac{1}{\cos^2(x+2y)}$ より $f_x(2,-1)=1$，$f_y = \dfrac{2}{\cos^2(x+2y)}$ より $f_y(2,-1)=2$ であるので，求める接平面は

$$z-0 = f_x(2,-1)(x-2) + f_y(2,-1)(y-(-1)) = (x-2)+2(y+1) = x+2y$$

であるので，これをまとめると $\boxed{x+2y-z=0}$.

(7) 求める法線は

$$\frac{x-2}{f_x(2,-1)} = \frac{y+1}{f_y(2,-1)} = \frac{z}{-1}$$

であるので，これをまとめると $\boxed{x-2 = \dfrac{y+1}{2} = -z}$.

[4]

(8) $f = e^x \sin(x^2+y)$ より $f(0,0)=0$,
$f_x = e^x \sin(x^2+y) + 2xe^x \cos(x^2+y)$ より $f_x(0,0)=0$,
$f_y = e^x \cos(x^2+y)$ より $f_y(0,0)=1$,
$f_{xx} = e^x \sin(x^2+y) + 2xe^x \cos(x^2+y) + 2e^x \cos(x^2+y) + 2xe^x \cos(x^2+y) - 4x^2e^x \sin(x^2+y)$ より $f_{xx}(0,0)=2$,
$f_{xy} = e^x \cos(x^2+y) - 2xe^x \sin(x^2+y)$ より $f_{xy}(0,0)=1$,
$f_{yy} = -e^x \sin(x^2+y)$ より $f_{yy}(0,0)=0$.
これらより，$f(x,y)$ の 2 次の項までのマクローリン展開は

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2) + o(r^2) \\
&= y + \frac{1}{2}(2x^2+2xy) + o(r^2) \\
&= y + x^2 + xy + o(r^2)
\end{aligned}$$

よって求める解は $\boxed{y+x^2+xy}$.

【別解】“ 漸近展開の一意性 ” を利用して計算してもよい（その方が簡単である）．つまり，
$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ $(x \to 0)$, $\sin t = t + o(t^2)$ $(t \to 0)$ なので

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \left\{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right\}\left\{(x^2+y) + o((x^2+y)^2)\right\} \\
&= (x^2+y) + x(x^2+y) + o(x^2+y^2) \\
&= y + x^2 + xy + o(x^2+y^2)
\end{aligned}$$

よって求める解は $\boxed{y+x^2+xy}$.

[5]

(9) 連立方程式

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 8x + 9 + 4y = 0 \cdots \text{(I)} \\ f_y = 4x + 4y = 0 \cdots \text{(II)} \end{cases}$$

を解く。まず (II) より $y=-x$ であるので，これを (I) に代入すると $3x^2 - 12x + 9 = 0$. これより $x = 3, 1$ であるので，求める点は $\boxed{(x,y) = (3,-3), (1,-1)}$.

(10) $f_{xx} = 6x - 8$，$f_{yy} = 4$，$f_{xy} = 4$ であるので判別式は

$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 8(3x-4) - 16 = 24(x-2)$$

これより $D(3,-3) > 0$，$D(1,-1) < 0$ であり，また $f_{xx}(3,-3) > 0$，$f(3,-3) = 0$ であるので，
求める解は $\boxed{\text{点 (3,-3) で極小値 0 をもつ}}$.

[6]

(11) 求める正射影は

$$\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|^2}\overrightarrow{OQ} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

(12) 求める体積は

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times|(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OR}| = \boxed{7}$$

[7]

(13)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-3 \end{bmatrix}$$

ここで rank $[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3] < 3$ であるとき，$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ は一次従属となるので，
求める条件は $\boxed{\alpha = 3}$.

(14) $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ が一次従属となるとき，(13) より，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

つまり $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ が一次従属となるとき $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ としたときの解 c_1，c_2，c_3 は $c_1 - c_3 = 0$，$c_2 + c_3 = 0$ を満たすので $c_1 = c_3$，$c_2 = -c_3$. つまり $c_3\mathbf{a}_1 - c_3\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ を満たす.
これより，例えば $c_3 = 1$ として，求める関係式は $\boxed{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}}$.

[8]

(15) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W$ であるとき $M = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 2 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ とすれば $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす. ここで

$$M \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるので，$M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ は $x + 3z = 0$，$y - 5z = 0$ を満たすので，

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3z \\ 5z \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって，求める解は $\boxed{\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$.

[9]

(16) $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ とすると，$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ である．また，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{v} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

であるので，求める解は $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}}$.

(17) 仮定より $[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3] = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ であり，また (16) より $\mathbf{v} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ であるので，

$$\mathbf{v} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]\begin{bmatrix} 10 \\ -11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

よって求める解は $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \boxed{\begin{bmatrix} 10 \\ -11 \\ 5 \end{bmatrix}}$.

[10]

(18)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} = 2 < 3$ であるので，$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ は一次従属である．また $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ は一次独立なので，求める解は $\dim W_1 = \boxed{2}$.

(19) (18) より $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle$ とできる．ここで $c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + 4c_2 \\ 2c_1 + 3c_2 \\ 3c_1 + 5c_2 \end{bmatrix} \in W_2$ であるためには $2(c_1 + 4c_2) + 3(2c_1 + 3c_2) + (3c_1 + 5c_2) = 0$ を満たせばよいので，これを解き $c_1 = -2c_2$ が得られる．これより，$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + 4c_2 \\ 2c_1 + 3c_2 \\ 3c_1 + 5c_2 \end{bmatrix} = c_2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ であるので，求める解は $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)}$.

(20)

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2x - 3y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

で，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ は一次独立なので，$\dim W_2 = 2$. また (18)，(19) より $\dim W_1 = 2$，$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ であるので，求める解は $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = \boxed{3}$.

【別解】 $W_1 + W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$ であるから，求める解は $\dim(W_1 + W_2) = \boxed{3}$.