平成 29 年度 数学演習第二 中間統一試験 問題用紙

2017 年 11 月 29 日実施 (90 分)

- 解答用紙の所定欄に結果のみを記すこと．
- 簡潔な解答になるよう努めること．不十分と判断された解答には得点を与えない．

1 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^3$ に対して次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ．

(2) $x(t) = e^t$, $y(t) = t^2$ に対し合成関数 $g(t) = f(x(t), y(t))$ を考える．$g(t)$ の導関数 $g'(t)$ に対して $g'(1)$ の値を求めよ．

2 2 変数関数 $f(x,y) = e^{xy} \sin xy$ に対して次の問いに答えよ．

(3) 偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ．

(4) 2 次の偏導関数 $f_{xx}(x,y)$ を求めよ．

(5) $x(u,v) = uv$, $y(u,v) = u^2 - v^2$ に対し合成関数 $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ を考える．$g(u,v)$ の偏導関数 $g_u(u,v)$ に対して $g_u(\pi,\pi)$ の値を求めよ．

3 2 変数関数 $f(x,y) = \tan(x+2y)$ に対して次の問いに答えよ．

(6) 曲面 $z = f(x,y)$ の点 $(2,-1,0)$ における接平面の方程式を求めよ．

(7) 曲面 $z = f(x,y)$ の点 $(2,-1,0)$ における法線の方程式を求めよ．

4 2 変数関数 $f(x,y) = e^x \sin(x^2 + y)$ に対して次の問いに答えよ．

(8) $f(x,y)$ の $(0,0)$ における 2 次の項までのマクローリン展開

$$f(x,y) = \underline{c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2} + o(r^2) \quad (r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0)$$

を求め，下線部に相当する部分を解答欄に記せ．

5 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 9x + 4xy + 2y^2$ に対して次の問いに答えよ．

(9) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ をみたす点 (x,y) をすべて求めよ．

(10) $f(x,y)$ が極値をとる点の座標とその極値を求めよ．（極大値か極小値かを明記すること．）

$\boxed{\mathbf{6}}$ 点 O(0,0,0), P(5,4,5), Q(1,2,1), R(14,9,7) とする．このとき，次の問いに答えよ．

(11) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 方向の直線への正射影を求めよ．

(12) 四面体 (三角錐) OPQR の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1 \end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ．

(13) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が一次従属となるための α がみたす条件を求めよ．

(14) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が一次従属となるとき非自明な一次関係式を一つ求めよ．ただし，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の係数がすべて整数であるものを答えること．

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{c} 6x + y + 13z = 0 \\ 2x - y + 11z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array} \right\}$ に対して次の問いに答えよ．

(15) W の基底を一つ求めよ．ただし，整数を成分とする列ベクトルを用いて答えること．

$\boxed{\mathbf{9}}$ $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$ とベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ．

(16) 座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$ を求めよ．

(17) $\mathbb{R}^3$ のある基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ に関する $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の座標をそれぞれ $[\boldsymbol{a}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{a}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{a}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする．このとき，座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$, $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + 3y + z = 0 \right\}$ に対して次の問いに答えよ．

(18) W_1 の次元 $\dim W_1$ を求めよ．

(19) 共通部分 $W_1 \cap W_2$ の基底を一つ求めよ．

(20) 和空間 $W_1 + W_2$ の次元を求めよ．