2017 年度 期末統一試験 解答例＋解説

$\boxed{1}$ (**陰関数・ラグランジュの未定乗数法**)

(1) $g(x,y)=2x^3+y^3-3x^2y+27$．$g_x=6x^2-6xy=6x(x-y)$．$g_y=3y^2-3x^2=3(y^2-x^2)$．
より $\varphi'(x)=-\dfrac{g_x}{g_y}=\dfrac{6x(x-y)}{3(x^2-y^2)}=\boxed{\dfrac{2x}{x+y}}$.

(2) $\varphi'(-2)=\dfrac{2\cdot(-2)}{(-2)+1}=4$ より，求める接線の方程式は，$y-1=4(x+2)$．すなわち，$\boxed{y=4x+9}$.

(3) (1) から得られる $2x-(x+y)\varphi'=0$ を x で微分して，$2-(1+y')\varphi'-(x+y)\varphi''=0$ を得る．$(x,y)=(-2,1)$ で，$y'=\varphi'=4$ であることに注意すると，$2-(1+4)\cdot 4-(-2+1)\varphi''=0$ より，$\varphi''(-2)=\boxed{18}$.

(4) ラグランジュの未定乗数法を使うために，$F=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x^2+y-\lambda(2x^3+y^3-3x^2y+27)$ とおく．F の停留点を求めるために，

$$\begin{cases} F_x=2x-6x(x-y)\lambda=0 & \cdots ① \\ F_y=1-3(y^2-x^2)\lambda=0 & \cdots ② \\ F_\lambda=-(2x^3+y^3-3x^2y+27)=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

を考える．①$\times(x+y)-$②$\times(2x)$ により λ を消去すると，$2x(x+y)+2x=0$，すなわち $2x(x+y+1)=0$ を得る．

$x=0$ のとき，③に代入すると $y^3+27=0$ より $y=-3$.

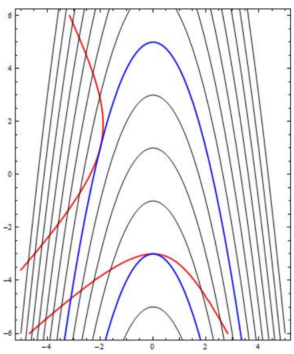
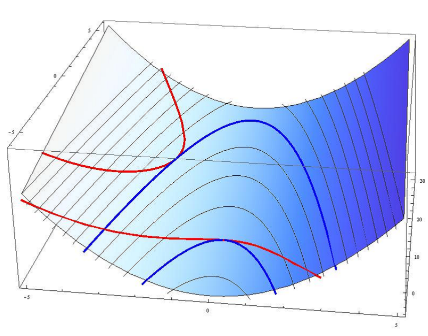
$x+y+1=0$ のとき，$y=-x-1$ を③に代入すると，$2x^3+(-x-1)^3-3x^2(-x-1)+27=4x^3-3x+26=(x+2)(4x^2-8x+13)=0$．ここで $4x^2-8x+13=0$ は判別式が $8^2-4^2\cdot 13<0$ なので実数解を持たないことから，$x=-2$．$y=-x-1=1$ となる．

よって F の停留点は，$(x,y)=(0,-3),(-2,1)$ となる．この点での g_y の値は $-3,0$ なので，いずれの点の周りでも陰関数 $y=\varphi(x)$ をとることができる．$h(x)=x^2+\varphi(x)$ とおいたとき，$h''(x)=2+\varphi''(x)$ の符号は右のようになる．

	$(0,-3)$	$(-2,1)$
$\varphi'(x)$	0	4
$\varphi''(x)$	$-\frac{2}{3}$	18
$h''(x)=2x+\varphi''(x)$	$\frac{4}{3}>0$	$20>0$
	極小	極小

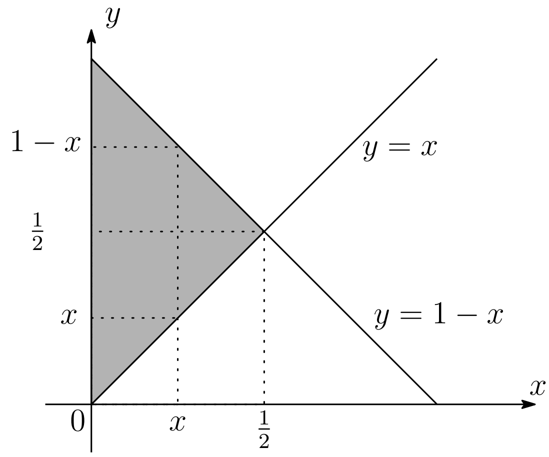
従って，$f(x,y)$ は，点 $(1,2)$ で極$\boxed{小}$値をとり，点$\boxed{(0,-3)}$で極$\boxed{小}$値をとることになる．

［参考図］ 左下図では，赤線が $g(x,y)=0$ を表す．(2 個の連結成分に分かれる．) 青線と黒線が $f(x,y)=k$ という曲線群であり，2 つの青線と赤線の交点が極値を与える点になる．これを $z=f(x,y)$ 上に図示したものが右下図である．

$\boxed{2}$ **（重積分の計算）**

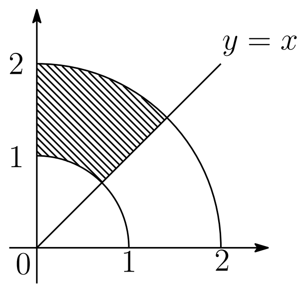
(5) 累次積分に直す．最初に y 方向に積分する累次積分になおせば積分区間を分けずに計算できる．



$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} xy dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{1-x} x dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{2} - x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{48}}.$$

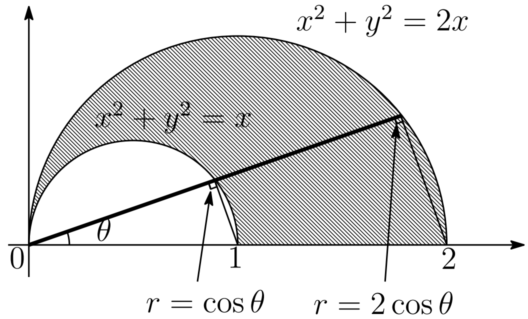
(6) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変数変換すると



$$\int_1^2 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r\sin\theta \cdot r d\theta = \int_1^2 r^2 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \cdot [-\cos\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{7}{6}\sqrt{2}}.$$

(7) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変数変換すると



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} r\sin\theta \cdot r dr$$

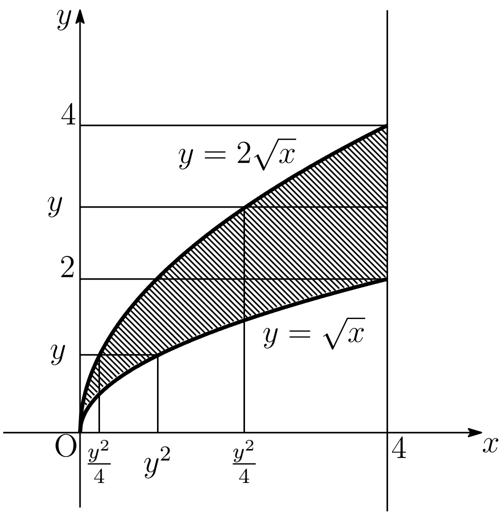
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_{\cos\theta}^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{7}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{7}{3}\left[-\frac{\cos^4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{7}{12}}.$$

$\boxed{3}$ **（積分順序の交換）**

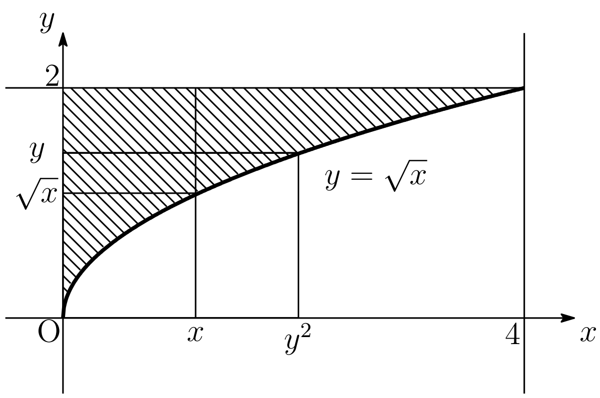
(8) 右図のように，y から積分する場合には，積分区間を $0 \leqq y \leqq 2$ と $2 \leqq y \leqq 4$ に分ける必要がある．



$$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$$

$$= \int_0^{\boxed{2}} dy \int_{\boxed{\frac{y^2}{4}}}^{\boxed{y^2}} f(x,y)dx + \int_{\boxed{2}}^4 dy \int_{\boxed{\frac{y^2}{4}}}^{\boxed{4}} f(x,y)dx$$

(9) $\dfrac{1}{\sqrt{1+y^3}}$ を y に関して積分することが困難なので，積分順序を交換する．



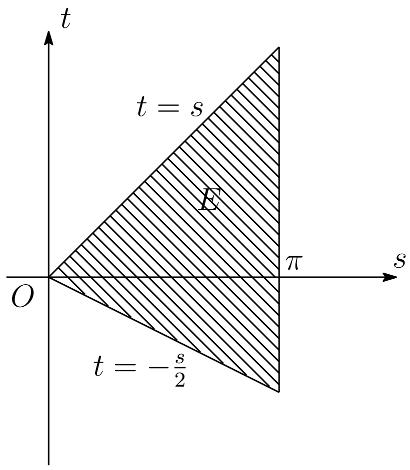
$$\int_0^2 dy \int_0^{y^2} dx \frac{1}{\sqrt{1+y^3}}$$

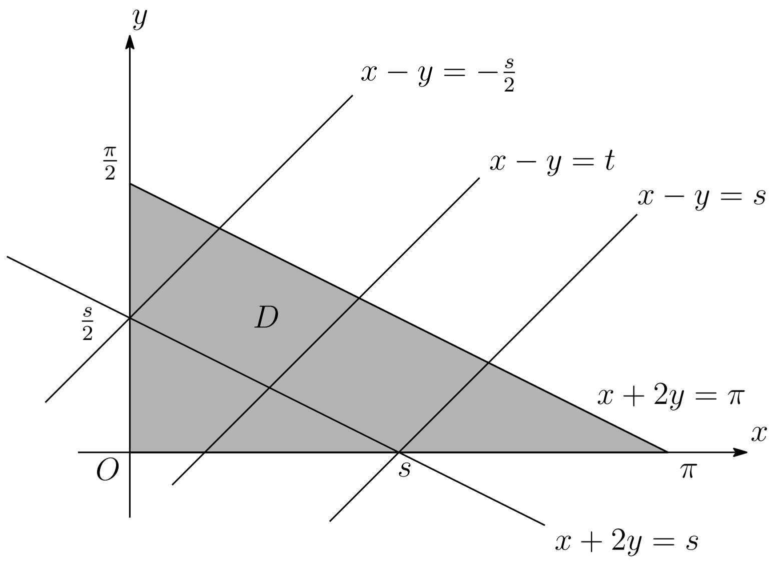
$$= \int_0^2 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}} dy$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{1+y^3}\right]_0^2 = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

$\boxed{4}$ **（重積分の変数変換）**

(10) 積分領域を図示すると右下図のようになる．$x+2\pi = s$ のとき，$t = x-y$ は $-\dfrac{s}{2}$ から s まで動くことを図形的に読み取って，右下図 $E = \left\{(s,t) \;\middle|\; \boxed{-\dfrac{s}{2}} \leqq t \leqq \boxed{s}\right\}$ を得る．あるいは数式的に，$x+2y=s, x-y=t$ を x,y について解いて，$x = \dfrac{s+2t}{3}, y = \dfrac{s-t}{3}$ を $x+2y \leqq \pi$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ に代入して，$s \leqq \pi$，$s+2t \leqq 0$，$s-t \leqq 0$ から，$s \leqq \pi$ と $-\dfrac{s}{2} \leqq t \leqq s$ を導いてもよい．





また，ヤコビアン $\dfrac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$ であることに注意する．重積分の変数変換公式により，

$$\iint_D (x+2y)\sin(x-y)dxdy = \iint_E u \sin v \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| dudv = \iint_E \boxed{\frac{1}{3}s\sin t} dsdt$$

となる．以下累次積分に直して積分を計算すると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\int_0^{\pi} ds \int_{-\frac{s}{2}}^{s} s\sin t dt = \frac{1}{3}s\left[-\cos t\right]_{-\frac{s}{2}}^{s} ds = \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left(s\cos\frac{s}{2} - s\cos s\right)ds \\
&= \frac{1}{3}\left\{\left[2s\sin\frac{s}{2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\sin\frac{s}{2}du - \left[s\sin s\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\sin s ds\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left(2\pi + \left[4\cos\frac{s}{2}\right]_0^{\pi} - \left[\cos s\right]_0^{\pi}\right) = \boxed{\frac{2}{3}(\pi-1)}.
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ **（線形写像の核と像）**

まず行基本変形により

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a & a-5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-2 & a-3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 & a-4 \end{bmatrix}$$

となることに注意する．

(11) $\dim \mathrm{Ker}\, f = 4 - \mathrm{rank}\, A$ だから，$\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$ となるのは，$a = \boxed{4}$ のときである．それ以外のときは，$\mathrm{rank}\, A = 3$ となるので $\dim \mathrm{Ker}\, f = \boxed{1}$ となる．

(12) $a = 4$ のとき，A の簡約行列は，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるから，$\mathrm{Ker}\, f$ の基底は，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の基本解を用いて $\left(\begin{bmatrix} \boxed{-1} \\ \boxed{-2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{-1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ と取れる．

(13) $\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rank}\, A$ だから，$a = 4$ のとき $\dim \mathrm{Im}\, f = \boxed{2}$.

(14) $a = 4$ のとき，A の簡約行列の主成分が存在するのが第 1 列と第 2 列であることに注意すれば，$\mathrm{Im}\, f$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ が取れる．ここで

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ b \end{bmatrix} \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ b \end{bmatrix} \text{が解を持つ．}$$

そこで

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & b+2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & b+3 \end{array}\right]$$

となることから，$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ b \end{bmatrix} \in \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow b = \boxed{-3}$.

$\boxed{6}$ **（線形写像の表現行列）**

(15) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} P$ となる行列 P を求めればよい．

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

より，$P = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}}$.

(16) (1) の P の第 1 列を用いると，$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とわかるので，

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + 2f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}.$$

(17) $\left[f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} M$ となる M を求めればよい．

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

より，$M = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}}$.

(18) $P^{-1}MP = P^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ が求める表現行列である．

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

より，$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}$ が求める表現行列．

［**注意**］ (2) で見たように $\mathcal{B}$ の元の行き先を直接計算できる．

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \overset{P\text{ の第 2 列}}{=} f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - 2f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

から求めてもよい．

$\boxed{7}$ **（行列の対角化）**

(19)

$$
\begin{aligned}
|\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & 2 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -\lambda-1 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-1)
\end{aligned}
$$

より，固有値は$\boxed{1, -1}$.

(20)

$$
\begin{aligned}
E - A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
-E - A &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

より，固有値 -1 の一次独立な固有ベクトルとして，$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が取れ，固有値 1 の固有ベクトルとして，$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が取れるので，

$$
P = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \text{ととれば}, P^{-1}AP = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}.
$$