平成 29 年度 数学演習第二 期末統一試験 問題用紙

2018 年 1 月 31 日実施 (90 分)

・解答用紙の所定欄に結果のみを記すこと．

・簡潔な解答になるよう努めること．不十分と判断された解答には得点を与えない．

1 2 変数関数 $g(x,y)=2x^3+y^3-3x^2y+27$ に対して，$g(x,y)=0$ 上の点 $(-2,1)$ のまわりで定義された C^2 級の陰関数を $y=\varphi(x)$ とする．

(1) $\varphi'(x)$ を x,y の式で表せ．

(2) 曲線 $g(x,y)=0$ 上の点 $(-2,1)$ における接線の方程式を求めよ．

(3) 点 $(-2,1)$ における $\varphi''(-2)$ の値を求めよ．

(4) $f(x,y)=x^2+y$ とする．このとき，$g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ の極値を求めると，点 $(-2,1)$ で極 $\boxed{\text{(a)}}$ 値をとり，点 $\boxed{\text{(b)}}$ で極 $\boxed{\text{(c)}}$ 値をとることがわかる．空所 $\boxed{\text{(a)}}$, $\boxed{\text{(b)}}$, $\boxed{\text{(c)}}$ に入る適切な文字または座標を解答用紙の所定欄に記入せよ．

2 次の重積分の値を求めよ．

(5) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy, \qquad D\ :\ x \geqq 0,\ x \leqq y \leqq 1-x$

(6) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy, \qquad D\ :\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq x \leqq y$

(7) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy, \qquad D\ :\ x \leqq x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0$

3

(8) $f(x,y)$ を連続関数とするとき，累次積分の順序交換を表す次の式の空所にあてはまる適切な数値や式を解答用紙の所定欄に記入せよ．

$$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy = \int_0^{\boxed{}} dy \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} f(x,y)dx + \int_{\boxed{}}^{4} dy \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} f(x,y)dx$$

(9) 累次積分 $\displaystyle\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+y^3}}\,dy$ の値を求めよ．

4

(10) 重積分

$$I=\iint_D (x+2y)\sin(x-y)dxdy, \qquad D\ :\ x+2y \leqq \pi,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

を変数変換 $s=x+2y,\ t=x-y$ を用いて求める．このとき，領域 D は，

$$E=\{(s,t)\mid 0 \leqq s \leqq \pi, \boxed{\text{あ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{い}}\}$$

に移されるので，$I=\displaystyle\iint_E \boxed{\text{う}}\,dsdt$ と変形でき，その値は $\boxed{\text{え}}$ となる．$\boxed{\text{あ}}$〜$\boxed{\text{う}}$ に入る s,t の式および $\boxed{\text{え}}$ の値を解答用紙の所定欄に記入せよ．

$\boxed{\textbf{5}}$ aを実数とする．行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a & a-5 \end{bmatrix}$ を用いて，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義される線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を考える．

(11) $\dim \mathrm{Ker} f = 2$ となる a の値は $\boxed{(あ)}$ であり，$a \neq \boxed{(あ)}$ のとき $\dim \mathrm{Ker} f = \boxed{(い)}$ である．空欄 $\boxed{(あ)}$, $\boxed{(い)}$ に入る適切な値を解答用紙の所定欄に記入せよ．

(12) a が (あ) の値のとき，$\mathrm{Ker} f$ の基底として，$\left(\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ の形のものが取れる．空所に入る適切な数値を解答用紙の所定欄に記入せよ．

(13) a が (あ) の値のとき，$\mathrm{Im} f$ の次元を求めよ．

(14) a が (あ) の値のとき，$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ b \end{bmatrix} \in \mathrm{Im} f$ となる b の値を求めよ．

$\boxed{\textbf{6}}$ $\mathbb{R}^3$ の 2 つの基底

$$\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

を考える．また，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

で定義する．

(15) 基底 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列を求めよ．

(16) $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ を求めよ．

(17) 基底 $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列を求めよ．

(18) 基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列を求めよ．

$\boxed{\textbf{7}}$ 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ を考える．

(19) A の固有値をすべて求めよ．

(20) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P として，$P = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ 1 & 0 & \square \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ という形のものをとると，$P^{-1}AP$ は $\boxed{（あ）}$ という対角行列となる．空所に入る適切な数値と対角行列 (あ) を解答用紙の所定欄に記入せよ．