数学演習第一（演習第 1 回）【解答例】

微積： 極限値，逆三角関数　2018 年 4 月 25 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x \to 0$ のとき，$\dfrac{\sin ax - \sin bx}{x} = a \cdot \dfrac{\sin ax}{ax} - b \cdot \dfrac{\sin bx}{bx} \to a - b.$

(6) $y = x - \dfrac{\pi}{3}$ とおけば，$x \to \dfrac{\pi}{3}$ のとき $y \to 0$ なので，

$$\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})-1}{x-\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin(y+\frac{\pi}{2})-1}{y} = \frac{\cos y - 1}{y} = \frac{(\cos y - 1)(\cos y + 1)}{y(\cos y + 1)}$$
$$= \frac{-\sin^2 y}{y(\cos y + 1)} = \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \frac{-y}{\cos y + 1} \to 1 \cdot 0 = 0.$$

(7) $\dfrac{1-\cos x}{x \tan x} = \dfrac{x}{\tan x} \cdot \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ と分けると考えやすい．$x \to 0$ のとき，$\dfrac{x}{\tan x} = \dfrac{x}{\sin x} \cdot \cos x \to 1$，

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} \to \frac{1}{2}$$

であるから，$\dfrac{1-\cos x}{x \tan x} \to 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}.$

【別法】(6), (7) では $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$ を用いる方法も有効．

(9) $x \to 0$ のとき，$\dfrac{a^x - 1}{x} = \dfrac{e^{(\log a)x} - 1}{(\log a)x} \cdot \log a \to 1 \cdot \log a = \log a$　なので，

$$\frac{x}{3^x - 2^x} = \frac{1}{\frac{3^x-1}{x} - \frac{2^x-1}{x}} \to \frac{1}{\log 3 - \log 2} \left(= \frac{1}{\log(3/2)}\right).$$

【別法】 $\dfrac{x}{3^x - 2^x} = \dfrac{1}{2^x} \dfrac{x}{(3/2)^x - 1}.$

(11) $x \to \dfrac{\pi}{2} - 0$ のとき $y := \dfrac{\pi}{2} - x \to +0$ であるから，$\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \tan x = y \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \dfrac{y}{\sin y} \cdot \cos y \to 1.$

(12) 自然対数をとって考える．$\displaystyle\lim_{x\to1} \log(x^{\frac{1}{1-x}}) = -\lim_{x\to1} \frac{\log x}{x-1} = -\lim_{y\to0} \frac{\log(1+y)}{y} = -1$　($y = x - 1$ とおいた)．$x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\log(x^{\frac{1}{1-x}})}$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x\to1} \log(x^{\frac{1}{1-x}})} = e^{-1} \left(= \frac{1}{e}\right).$

(13) 自然対数をとって考える．$\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\log(\cos x)}{x^2} = \dfrac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ であるから，(7), (12) の計算を用いて，

$$\lim_{x\to0} \log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = \lim_{y\to1} \frac{\log y}{y-1} \cdot \lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} \quad (y = \cos x \text{ とおいた})$$

よって，(12) と同様に，$\displaystyle\lim_{x\to0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to0} \log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = e^{-\frac{1}{2}} \left(= \frac{1}{\sqrt{e}}\right).$

【別法】$x = 0$ の近くで $\cos x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$ であるから，$x \to 0$ のとき，

$$\frac{\log(\cos x)}{x^2} = \frac{\log(1 - \sin^2 x)}{2x^2} = -\frac{1}{2} \frac{\log(1 - \sin^2 x)}{-\sin^2 x} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to -\frac{1}{2}.$$

【注意】一般に，$b = \displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し，$g(y)$ が b で連続なら，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(b)$ が成り立つ (連続性の定義！)．(12), (13) の解答例ではこの事実 (e^x の連続性) を用いている．

(14) $x \to +0$ のとき，$\sin x \to +0$, $\log(\sin x) \to -\infty$ に注意して，

$$\frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)} = \frac{\log(\sin 2x) - \log(\cos 2x)}{\log(\sin x) - \log(\cos x)} = \frac{\log(\sin x) + \log(\cos x) + \log 2 - \log(\cos 2x)}{\log(\sin x) - \log(\cos x)}$$
$$= \frac{1 + \frac{\log(\cos x) + \log 2 - \log(\cos 2x)}{\log(\sin x)}}{1 - \frac{\log(\cos x)}{\log(\sin x)}} \to 1.$$

【別法】 $x \to +0$ のとき，$y := \tan x \to +0$ であるから，$\tan 2x = 2y/(1-y^2)$, $\log y \to -\infty$ に注意して，

$$\frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)} = \frac{\log 2 + \log y - \log(1-y^2)}{\log y} = 1 + \frac{\log 2 - \log(1-y^2)}{\log y} \to 1.$$

$\boxed{2}$ (1) $x=\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ とおけば，$\sin x=-\frac{1}{2}\ \left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ であるから $x=-\frac{\pi}{6}$．

(2) $x=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ とおけば，$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ であるから $x=\frac{\pi}{6}$.

(3) $x=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right)$ とおけば，$\sin x=\sin\frac{3\pi}{5}\ \left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ であるから $x=\pi-\frac{3\pi}{5}=\frac{2\pi}{5}$.

(4) $x=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\tan\frac{4\pi}{7}\right)$ とおけば，$\tan x=\tan\frac{4\pi}{7}\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ であるから $x=\frac{4\pi}{7}-\pi=-\frac{3\pi}{7}$.

(5) $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}(-2)$ とおけば，$\tan\alpha=-2\ \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ で，$\sin\left(\mathrm{Tan}^{-1}(-2)\right)=\sin\alpha$. このとき，$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha=5$ より $\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$ となり，$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{4}{5}$. $\tan\alpha<0$ より $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ となるので, $\sin\alpha<0$ となり，求める値は $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

【別法】 $\cos\alpha>0$ より $\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$ を用いて $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

(6) $\alpha=\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ とおけば，$\cos\alpha=-\frac{1}{3}\ (0\le\alpha\le\pi)$ で，$\tan\left(\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\tan\alpha$. このとき，$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=9$ より $\tan^2\alpha=8$. $\cos\alpha<0$ より $\frac{\pi}{2}<\alpha\le\pi$ となるので，$\tan\alpha<0$ となり，求める値は $\tan\alpha=-2\sqrt{2}$.

【別法】 $\sin\alpha\ge0$ より $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ を用いて $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\sqrt{2}$.

$\boxed{3}$ **《考え方》** 関係式「$\mathrm{Cos}^{-1}a=b$」は「$\cos b=a$ かつ $0\le b\le\pi$」と同値である．よって, $\mathrm{Cos}^{-1}x=b$ を未知数 x の方程式と考えるとき, $b\in[0,\pi]$ ならば (唯一の) 解 $x=\cos b$ を持ち, $b\notin[0,\pi]$ ならば解を持たない.

(1) $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}2$ とおけば, $\tan\alpha=2\ (>0)$ かつ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. よって, $\mathrm{Cos}^{-1}x=\alpha$ は解を持ち, $x=\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ で与えられる．【注】$\mathrm{Cos}^{-1}x=-\mathrm{Tan}^{-1}2$ は解をもたない.

(2) $\alpha=\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{4}\ (>0)$ とおけば, $\sin\alpha=\frac{1}{4}$ かつ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. このとき, $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-2\alpha<\frac{\pi}{2}$ であるから, $\mathrm{Sin}^{-1}x+2\alpha=\frac{\pi}{2}$ ($\Leftrightarrow$ $\mathrm{Sin}^{-1}x=\frac{\pi}{2}-2\alpha$) は解を持ち, $x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{7}{8}$ で与えられる．【注】$\mathrm{Sin}^{-1}x-2\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}$ は解をもたない.

(3) $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3}\ (>0)$ とおけば, $\tan\alpha=\frac{1}{3}$ かつ $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ ($0<\frac{1}{3}<1=\tan\frac{\pi}{4}$ に注意). このとき, $-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-2\alpha<\frac{\pi}{4}$ より, $\mathrm{Tan}^{-1}x+2\alpha=\frac{\pi}{4}$ ($\Leftrightarrow$ $\mathrm{Tan}^{-1}x=\frac{\pi}{4}-2\alpha$) は解を持ち, $x=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan2\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan2\alpha}=\frac{1-\tan2\alpha}{1+\tan2\alpha}$ で与えられる．ここで, $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{3}{4}$ であるから, $x=\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{1}{7}$ が得られる.

【注】$\mathrm{Tan}^{-1}x-2\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$ も解を持つ ($x=7$) が，$\mathrm{Tan}^{-1}x-2\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$ は解をもたない.

$\boxed{4}$ (1) $\theta=\mathrm{Sin}^{-1}x$ とおけば, $\sin\theta=x\ (-\pi/2\le\theta\le\pi/2)$. このとき, $x=\sin\theta=\cos(\pi/2-\theta)$ かつ $0\le\pi/2-\theta\le\pi$ であるから, Cos^{-1} の定義により $\pi/2-\theta=\mathrm{Cos}^{-1}x$. よって，$\mathrm{Sin}^{-1}x+\mathrm{Cos}^{-1}x=\theta+(\pi/2-\theta)=\pi/2$.

(2) $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}x$ とおけば, $x>0$ に注意して, $\tan\theta=x\ (0<\theta<\pi/2)$. このとき,

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(\pi/2-\theta)}{\cos(\pi/2-\theta)}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

かつ $0<\pi/2-\theta<\pi/2$ であるから, Tan^{-1} の定義により $\pi/2-\theta=\mathrm{Tan}^{-1}(1/x)$. よって，$\mathrm{Tan}^{-1}x+\mathrm{Tan}^{-1}(1/x)=\theta+(\pi/2-\theta)=\pi/2$. 【注】$x<0$ では, $\mathrm{Tan}^{-1}x+\mathrm{Tan}^{-1}(1/x)=-\pi/2$ が成り立つ.

$\boxed{5}$ (1) $\cosh^2x-\sinh^2x=(\cosh x+\sinh x)(\cosh x-\sinh x)=e^x\cdot e^{-x}=1$.

(2) $y=\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ のとき, $(e^x)^2-2ye^x-1=0$. これを $e^x\ (>0)$ に関する 2 次方程式と見て解き, $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$. よって , $y=\sinh x$ の逆関数は $x=\log(y+\sqrt{y^2+1}\,)$ (あるいは x,y を交換して, $y=\log(x+\sqrt{x^2+1}\,)$). 同様に, $y=\tanh x$ のとき $(e^x+e^{-x})y=e^x-e^{-x}$ であるから, $e^{2x}=\frac{1+y}{1-y}$ となり, $y=\tanh x$ の逆関数は $x=\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}\ \left(=\log\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)\ (-1<y<1)$.

(3) 考え方は (2) と同じなので, 結果のみ. $y=\cosh x\ (x\ge0)$ の逆関数は $x=\log(y+\sqrt{y^2-1}\,)$. また, $y=\cosh x\ (x\le0)$ の逆関数は $x=\log(y-\sqrt{y^2-1}\,)\ \left(=-\log(y+\sqrt{y^2-1}\,)\right)$.