

数学演習第一 (演習第1回)

微積：極限值，逆三角関数

2018 年 4 月 25 日

1 演習書 問題 2.2.1 (1), (6), (7), (8), (9), (11), (12), (13): 次の極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} \quad (ab \neq 0)$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3^x - 2^x}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)}$$

Hint:

- 次の極限値が基本: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.
- (12), (13) については, まず対数をとった関数の極限値を求める.

2 問題 2.3.1 【改題】: 次の値を求めよ.

$$(1) \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(2) \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(3) \sin^{-1}\left(\sin \frac{3\pi}{5}\right)$$

$$(4) \tan^{-1}\left(\tan \frac{4\pi}{7}\right)$$

$$(5) \sin(\tan^{-1}(-2))$$

$$(6) \tan\left(\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

3 問題 2.3.3 (1), (2), (3): 次の方程式を解け.

$$(1) \cos^{-1} x = \tan^{-1} 2$$

$$(2) \sin^{-1} x + 2 \sin^{-1} \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$(3) \tan^{-1} x + 2 \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

4 問題 2.3.4 【改題】: 次の関係式を示せ.

$$(1) \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (x > 0)$$

5 双曲線関数 $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ について次の問いに答えよ.

$$(1) \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \text{ を示せ.}$$

$$(2) y = \sinh x \text{ および } y = \tanh x \text{ の逆関数をそれぞれ求めよ.}$$

$$(3) y = \cosh x \ (x \geq 0) \text{ および } y = \cosh x \ (x \leq 0) \text{ の逆関数をそれぞれ求めよ.}$$

【注】 5 は時間が余ったら解いて下さい.