

数学演習第一（演習第2回） 【解答例】

線形：平面の方程式，行列の演算 2018 年 5 月 9 日

- 1 (1) 平面 P は $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) = 0$ と表される. これを整理して, $x - 2y + 3z + 5 = 0$.
- (2) 直線 ℓ は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表される. これより t を消去して $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = z+1$. 次に, 直線 ℓ 上の点は $(2t+1, -3t+2, t-1)$ と書けるので, 平面 P との交点において $(2t+1) - 2(-3t+2) + 3(t-1) + 5 = 0$. これより $t = \frac{1}{11}$ が得られ, 交点の座標は $\left(\frac{13}{11}, \frac{19}{11}, -\frac{10}{11} \right)$.
- (3) 直線 BH は点 B を通り, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルするから, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ と表される. よって, 平面 P との交点 H において, $(1+t) - 2(2-2t) + 3(-1+3t) = -5$. これより $t = \frac{1}{14}$ が得られ, 点 H の座標は $\left(\frac{15}{14}, \frac{13}{7}, -\frac{11}{14} \right)$. また, $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ となり, 垂線 BH の長さは $\frac{1}{14} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \frac{1}{\sqrt{14}}$.
- (4) 点 K は直線 ℓ 上の点であるから, $K(1+2t, 2-3t, -1+t)$ と表せる. このとき, $\overrightarrow{AK} = \begin{bmatrix} 1+2t \\ 2-3t \\ -1+t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2t \\ 1-3t \\ 1+t \end{bmatrix}$ と直線 ℓ は垂直ゆえ, $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2+2t \\ 1-3t \\ 1+t \end{bmatrix} = 2(-2+2t) - 3(1-3t) + (1+t) = 0$. これより $t = \frac{3}{7}$ が得られ, 点 K の座標は $\left(\frac{13}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{4}{7} \right)$. また, 垂線 AK の長さは $\sqrt{\left(-\frac{8}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{10}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{42}}{7}$.
- (5) ①, ②のそれぞれの場合に応じて, 「垂線の足」を $\mathbf{x}_2$ で表すとする.

① $\mathbf{x}_2$ は①の平面上にあるから, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) = 0$. また, $\mathbf{x}_2$ は $\mathbf{x}_1$ を通り, $\mathbf{a}$ を方向ベクトルとする直線上にあるから, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{a}$ と書ける. これら 2 式より, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 + t\mathbf{a} - \mathbf{x}_0) = 0$. これより $t = -\frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{a}\|^2}$ が得られ, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$. 更に, 垂線の長さは $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = \left\| \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} \right\| = \frac{|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{a}\|}$. なお, 平面が $ax + by + cz + d = 0$ と表されるなら $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_0 + d = 0$ であるから, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1 + d$ となり, 垂線の長さは $\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ で与えられる.

② $\mathbf{x}_2$ は②の直線上にあるから, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}$ と書ける. このとき, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ はこの直線と垂直ゆえ, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 - t\mathbf{a}) = 0$. よって, $t = \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{a}\|^2}$ となり, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$. 垂線の長さについては, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ とおき, $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 = \left\| \hat{\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} \right\|^2 = \|\hat{\mathbf{x}}\|^2 - 2 \frac{\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \left\| \frac{\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} \right\|^2 = \|\hat{\mathbf{x}}\|^2 - \frac{|\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{x}}|^2}{\|\mathbf{a}\|^2} = \frac{\|\mathbf{a}\|^2 \|\hat{\mathbf{x}}\|^2 - |\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{x}}|^2}{\|\mathbf{a}\|^2}$ より, $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = \frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|^2 - |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|^2}}{\|\mathbf{a}\|}$.

2 (1) $-A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, (2) $2A + 3B = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ -3 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, (3) $X = \frac{1}{2}(4B - 3A) = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} & \frac{9}{2} \\ -2 & -3 \\ -1 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$.

3 演習書の解答参照.

4 ${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$, ${}^tB = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, ${}^t(AB) = \begin{bmatrix} 39 & 30 \\ 33 & 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & 33 \\ 30 & 33 \end{bmatrix} = {}^tB {}^tA$,
 ${}^tA {}^tB = {}^t(BA) = \begin{bmatrix} 21 & 24 & 66 \\ 17 & 28 & 68 \\ 5 & 10 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 17 & 5 \\ 24 & 28 & 10 \\ 66 & 68 & 23 \end{bmatrix}$. (3 で AB, BA を計算した)

5 目の子で探してもよいが, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ をそれぞれの関係式に代入してみればシステムティックに例が求まる.

$$\text{まず, } AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+c & -b+d \\ 2a-2c & 2b-2d \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+2b & a-2b \\ -c+2d & c-2d \end{bmatrix}.$$

(1) $AB - BA = \begin{bmatrix} -2b+c & -a+b+d \\ 2a-c-2d & 2b-c \end{bmatrix} = O$ となるのは $a = b + d$ かつ $c = 2b$ の場合であるから, $AB \neq BA$ であるためにはこれら 2 式のうち少なくとも一方が成り立たなければよい.

(2) $AB = \begin{bmatrix} -a+c & -b+d \\ 2a-2c & 2b-2d \end{bmatrix} = O$ を満たす $B \neq O$ の一般形は $B = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} ((a, b) \neq (0, 0))$.

(3) $BA = \begin{bmatrix} -a+2b & a-2b \\ -c+2d & c-2d \end{bmatrix} = O$ を満たす $B \neq O$ の一般形は $B = \begin{bmatrix} 2b & b \\ 2d & d \end{bmatrix} ((b, d) \neq (0, 0))$.

【補足】 a, b が実数ならば, $ab = ba$ であり, $ab = 0$ ならば a, b の少なくとも一方は 0 となる. 上の例は, 行列の積に関してはこれらの事実は必ずしも成立しないことを示している.

6 (1) $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (ad - bc)E$ となることは容易に分かる.

① $ad - bc \neq 0$ ならば, 上の関係式の両辺を $ad - bc \neq 0$ で割り, $A\left(\frac{1}{ad-bc}\tilde{A}\right) = \left(\frac{1}{ad-bc}\tilde{A}\right)A = E$.
よって, $\frac{1}{ad-bc}\tilde{A}$ が A の逆行列である.

② $ad - bc = 0$ ならば $A\tilde{A} = O$ となるが, このとき A が逆行列 A^{-1} をもつ (= 正則) と仮定すれば, $\tilde{A} = (A^{-1}A)\tilde{A} = A^{-1}(A\tilde{A}) = A^{-1}O = O$ となり, $A = O$ が従う (成分に注目). ところが, $A = O$ はどんな 2 次正方行列を掛けても O となるので, A が逆行列をもつという仮定に矛盾する.

(2) ① $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}.$

② $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{23} \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ -9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{23} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{23} \\ \frac{3}{23} \end{bmatrix}.$

7 (1) 具体的な計算により, $A\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{p}_2, A\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3.$

(2) (1) の結果を用いて,

$$\begin{aligned} AP &= A[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3] = [A\mathbf{p}_1 \quad A\mathbf{p}_2 \quad A\mathbf{p}_3] = [\mathbf{p}_1 \quad 2\mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3] \\ &= [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるから, B として $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ がとれる. (実は, P は正則であり, $B = P^{-1}AP$ が成り立つ.)

8 (1) $(x', y') = (x, -y)$ より, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. すなわち, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(2) $x' + iy' = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta)$ より,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \text{ すなわち, } Q_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

(3) ヒントにより, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q_\theta \left(R \left(Q_{-\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \right) = Q_\theta R Q_{-\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ が成り立つ (第 2 の等号は行列の積の結合法則による). よって,

$$\begin{aligned} R_\theta &= Q_\theta R Q_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$