数学演習第一（演習第２回）

線形：平面の方程式, 行列の演算

2018 年 5 月 9 日

1 【空間内の直線と平面】(線形教科書 pp.10–13 参照) 以下では, 点 (x_0, y_0, z_0) とその位置ベクトル $\boldsymbol{x}_0 = {}^t(x_0, y_0, z_0)$ を適宜同一視する.

① 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t(x_0, y_0, z_0)$ を通り, $\boldsymbol{a} = {}^t(a, b, c)$ を法線ベクトルとする平面 ($\boldsymbol{a}$ と垂直な平面) の方程式は

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \quad \text{あるいは} \quad \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

(右の表現は通常 $ax + by + cz + d = 0$ または $ax + by + cz = d$ の形に整理する.)

② 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t(x_0, y_0, z_0)$ を通り, $\boldsymbol{a} = {}^t(a, b, c)$ を方向ベクトルとする直線 ($\boldsymbol{a}$ と平行な直線) の方程式は

$$\underset{(t\,:\,\text{媒介変数})}{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}} \quad \left(\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \right) \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}.$$

(右の表現は $abc \neq 0$ の場合の形. 例えば $a = 0, bc \neq 0$ なら, $x = x_0, \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ となる.)

(1) 点 $\mathrm{A}(3, 1, -2)$ を通り, $\boldsymbol{a} = {}^t(1, -2, 3)$ を法線ベクトルとする平面 (以下, 平面 P と呼ぶ) の方程式を求めよ.

(2) 2 点 $\mathrm{B}(1, 2, -1)$, $\mathrm{C}(3, -1, 0)$ を通る直線 (以下, 直線 ℓ と呼ぶ) の方程式を求めよ. 更に, 平面 P と直線 ℓ の交点を求めよ.
【ヒント】直線 ℓ を媒介変数表示し, 平面 P の方程式に代入せよ.

(3) 点 B から平面 P に垂線 BH を下ろすとき, 点 H (垂線の足) の座標と垂線 BH の長さ (点 B と平面 P との距離) を求めよ.

(4) 点 A から直線 ℓ に垂線 AK を下ろすとき, 点 K (垂線の足) の座標と垂線 AK の長さ (点 A と直線 ℓ との距離) を求めよ.

(5) ① ①の平面に点 $\boldsymbol{x}_1 = {}^t(x_1, y_1, z_1)$ から垂線を下ろすとき, 垂線の足は $\boldsymbol{x}_1 - \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \boldsymbol{a}$ であり, $\boldsymbol{x}_1$ と平面との距離 (垂線の長さ) は $\dfrac{|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ (平面が $ax + by + cz + d = 0$ と表されるなら $\dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$) であることを示せ.

② ②の直線に点 $\boldsymbol{x}_1$ から垂線を下ろすとき, 垂線の足は $\boldsymbol{x}_0 + \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \boldsymbol{a}$ であり, $\boldsymbol{x}_1$ と直線との距離 (垂線の長さ) は $\dfrac{\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|^2 - |\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)|^2}}{\|\boldsymbol{a}\|} \left(= \dfrac{\|\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|} \right)$ で与えられることを示せ.

2 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ のとき, 次の行列を求めよ: (1) $-A$, (2) $2A + 3B$, (3) $2X + 3A = 4B$ を満たす行列 X.

3 (演習書) 問題 8.1.1 (1), (2), (3), (4) の行列 A, B に対し, 積 AB, BA が定義されるなら計算せよ.

4 (演習書) 問題 8.1.1 (3) の行列 A, B に対して, 転置行列 ${}^tA, {}^tB, {}^t(AB)$ を求めよ. 更に, 積 ${}^tB\,{}^tA$, ${}^tA\,{}^tB$ を求めよ.

5 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ のとき, 次の性質を満たす零行列でない 2 次正方行列 B の例をそれぞれ挙げよ.

(1) $AB \neq BA$ (2) $AB = O$ (3) $BA = O$

6 (1) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して, $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ とおく. このとき, $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (ad - bc)E$ となることを確認し, 次の主張を示せ.

① $ad - bc \neq 0$ ならば, A は正則であり, その逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\widetilde{A}$. ② $ad - bc = 0$ ならば, A は正則でない.

(2) 上の事実を用いて, ① $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ. ② 連立 1 次方程式 $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を解け.

7 行列 $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) $A\boldsymbol{p}_1 = \lambda\boldsymbol{p}_1$, $A\boldsymbol{p}_2 = \mu\boldsymbol{p}_2$, $A\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 + \mu\boldsymbol{p}_3$ を満たす実数 λ, μ を求めよ.

(2) 3 次の正方行列 P が $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}$ と列ベクトル分割した形で与えられているとする. このとき, $AP = PB$ となる 3 次正方行列 B を答えよ.

8 次を満たす 2 次正方行列 R, Q_θ, R_θ を定めよ.

(1) 点 (x, y) を x 軸に関して対称移動した点を (x', y') とするとき, この 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ.

(2) 点 (x, y) を原点の周りに角 θ だけ回転移動した点を (x', y') とする. これを複素数平面上で考えれば, $x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy)$ と書ける. このとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ.

(3) x 軸を原点の周りに角 θ だけ回転移動した直線を ℓ_θ とする. 点 (x, y) を ℓ_θ に関して対称移動した点を (x', y') とするとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ. 【ヒント】点 (x, y) を, まず原点の周りに $-\theta$ だけ回転移動し (この回転移動で ℓ_θ は x 軸に重なる), 次に x 軸に関して対称移動し, 最後に原点の周りに θ だけ回転移動すれば点 (x', y') が得られる.