

数学演習第一（演習 第 3 回） 微積：合成関数の微分法, 逆関数の微分法等

2018 年 5 月 16 日 実施

- 1 (1) $f(x)$ の定義域は $x > e$ である. 合成関数の微分法により,

$$f'(x) = \frac{(\log(\log x))'}{\log(\log x)} = \frac{1}{\log(\log x)} \cdot \frac{(\log x)'}{\log x} = \frac{1}{x(\log x) \log(\log x)}.$$

- (2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で定義される. 合成関数の微分法により,

$$f'(x) = a^{x^2+2x}(\log a) \cdot (x^2 + 2x)' = 2(x+1)a^{x^2+2x} \log a.$$

- (3) $f(x)$ は $\cos x \neq \pm 1$ のときに定義される. このままの形で微分することもできるが, 対数の性質を利用して $f(x) = \frac{1}{2}\{\log(1 - \cos x) - \log(1 + \cos x)\}$ と変形してから微分する:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} - \frac{-\sin x}{1 + \cos x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \sin x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\sin x}.$$

あるいは, $f(x) = \log |\tan \frac{x}{2}|$ と整理してから微分してもよい.

- (4) $f(x)$ は $x \neq -3, 2$ で定義される. $x \neq -1$ のとき, $\log|f(x)| = 2\log|x+1| - 3\log|x-2| - 4\log|x+3|$ の両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-2} - \frac{4}{x+3} = -\frac{5x^2 + 6x + 13}{(x+1)(x-2)(x+3)}. \\ \therefore f'(x) &= \frac{(x+1)^2}{(x-2)^3(x+3)^4} \cdot \frac{-(5x^2 + 6x + 13)}{(x+1)(x-2)(x+3)} = -\frac{(x+1)(5x^2 + 6x + 13)}{(x-2)^4(x+3)^5}. \end{aligned}$$

この式は $x = -1$ のときも成り立つ.

【注】 対数微分法を適用する際に, 理論的には, (分母の零点とともに) 分子の零点 $x = -1$ が定義域から外れるが, 計算結果 (上式右辺の有理式) をもとの有理式の導関数と見るならば $x = -1$ でも有効である. 実際, 商の微分公式から, 有理式は分母の零点以外で (計算しなくても) 連続な導関数をもつことが分かっている.

- (5) $f(x)$ の定義域は $0 < x < 1$ である. $\log(f(x)) = \frac{1}{2}\{\log(1 - \sqrt{x}) - \log(1 + \sqrt{x})\}$ の両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1 - x)}. \\ \therefore f'(x) &= \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}(1 - x)} = -\frac{1}{2(1 + \sqrt{x})\sqrt{x(1 - x)}}. \end{aligned}$$

- (6) $f(x)$ の定義域は $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2n\pi, (2n+1)\pi)$ である. $\log f(x) = \tan x \cdot \log(\sin x)$ の両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \log(\sin x) + \tan x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\log(\sin x)}{\cos^2 x} + 1. \\ \therefore f'(x) &= (\sin x)^{\tan x} \left(\frac{\log(\sin x)}{\cos^2 x} + 1 \right). \end{aligned}$$

- 2 (1) $y = \text{Sin}^{-1} x$ とおけば, $x = \sin y$ ($-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$), $\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - x^2}$ より, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

- (2) $y = \text{Cos}^{-1} x$ とおけば, $x = \cos y$ ($0 \leq y \leq \pi$), $\frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1 - x^2}$ より, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

- (3) $y = \text{Tan}^{-1} x$ とおけば, $x = \tan y$ ($-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$), $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + x^2$ より, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$.

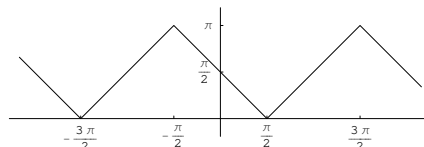
3 (1) $f'(x) = 2 \cdot \sin^{-1} x \cdot (\sin^{-1} x)' = \frac{2 \cdot \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}.$

(2) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}} \cdot (\sqrt{1-x})' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}.$

(3) $f(x) = \frac{(\tan^{-1} x)' \cdot (1+x^2) - \tan^{-1} x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2) - \tan^{-1} x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$
 $= \frac{1-2x \cdot \tan^{-1} x}{(1+x^2)^2}.$

(4) $f'(x) = -\frac{(\sin x)'}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{\cos x}{|\cos x|} \left(= \begin{cases} -1 & (\cos x > 0) \\ 1 & (\cos x < 0) \end{cases} \right).$

《注》上の事実と $\cos^{-1}(\sin n\pi) = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} \ (n \in \mathbb{Z})$
より, $y = \cos^{-1}(\sin x)$ のグラフは右の通り.



(5) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+(1/x)^2} = 0.$

《注》 $\tan^{-1}(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{4}$ であるから上と合わせて, $f(x) = \pm \frac{\pi}{2} \ (x \geq 0)$ (複号同順).

(6) $f'(x) = \frac{(2x-1)'}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} + 2 \cdot \frac{-(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} + \frac{-2}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0.$

《注》 $f(x)$ は定義域 $0 < x < 1$ で定数であり, $f(x) = f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$. このことは $\theta = \cos^{-1} \sqrt{x}$ とおくと $\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) = \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2x - 1$ となることからわかる.

(7) $f'(x) = \sqrt{a^2-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} + a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}} \cdot \frac{1}{a} = \sqrt{a^2-x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$
 $= 2\sqrt{a^2-x^2}.$

4 双曲線関数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ については微積教科書 p.19 参照. 特に, 次の性質は重要 (三角関数の場合と比較せよ):

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

これらの性質は定義を用いて容易に確認できる.

(1) まず, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sinh x = \pm\infty$ (複号同順) と中間値の定理により, $y = \sinh x$ の値域は $\mathbb{R}$ 全体. また,
 $\frac{dy}{dx} = \cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \sqrt{1+y^2}$ である. $\frac{dy}{dx} > 0$ と $y = \sinh x$ の全射性により, $y = \sinh x$
の逆関数は $\mathbb{R}$ 全体で定義される. その導関数は $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$

《別解》 $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ により $x = \log(y + \sqrt{1+y^2})$ と具体的な形を求めることもできる. よって, その導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

(2) まず, $\tanh x = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$ より, $y = \tanh x$ の値域は $-1 < y < 1$ である. また, $\frac{dy}{dx} =$
 $\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = 1 - y^2$ である. これにより $\frac{dy}{dx} > 0$ であることがわかり,
 $y = \tanh x$ の逆関数は $-1 < y < 1$ で定義される. その導関数は $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1-y^2}.$

《別解》 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$ に注意する. $e^{2x} > 0$ なので, この等式を満たす
 $x \in \mathbb{R}$ が存在するための条件は $-1 < y < 1$ であり, このとき $x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \left(= \log \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \right)$
を得る. よって, その導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \frac{d}{dy} \{ \log(1+y) - \log(1-y) \} = \frac{1}{1-y^2} \quad (-1 < y < 1).$$