

# 数学演習第一

## 第4回 線形：行列の基本変形, 簡約行列, 行列の階数

2018年5月23日

1 次の行列が簡約行列ではない理由を1行程度で記し, 簡約行列にするための基本変形を述べよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 下の行列の簡約化について, 空欄を埋めよ. (記法は教科書の pp. 39-43 に従うこと.)

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \square & \square \\ 0 & \square & \square \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \square \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 次の行列を基本変形で簡約行列に変形し, 階数を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \\ 1 & 16 & 81 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 3 & 3 & 15 & 1 \\ 5 & 2 & 16 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

4 行列  $A$  に行基本変形を(何回か)施した結果が  $B$  となる時,  $MA = B$  を満たす行列  $M$  が存在する(教科書 pp. 43-46 参照). 以下の「行基本変形(の繰り返し)」について  $M$  に相当する行列を記せ.

[例]  $2 \times 2$  行列に対して「第1行を3倍し, 次に第2行を  $-2$  倍する」

[解] 基本行列は  $2 \times 2$  型,  $A \xrightarrow[\textcircled{2} \times (-2)]{\textcircled{1} \times 3} B$  なので,  $B = P_2(-2)P_1(3)A$ . 従って,  $M = P_2(-2)P_1(3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ . 但し,  $P_1(-2)$  等は, 基本行列を表す記号(教科書 p. 43).

(1)  $3 \times 2$  行列に対して「第1行へ第2行の  $-5$  倍を加える」

(2)  $3 \times 4$  行列に対して「第3行を2倍し, 次に第1行と第3行を入れ換える」

(3)  $4 \times 3$  行列に対して「第2行へ第4行の5倍を加え, 次に第2行へ第1行の2倍を加え, 次に第1行と第4行を入れ換え, 次に第3行へ第2行の  $-3$  倍を加える」

5 次の行列の階数を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{bmatrix}$$