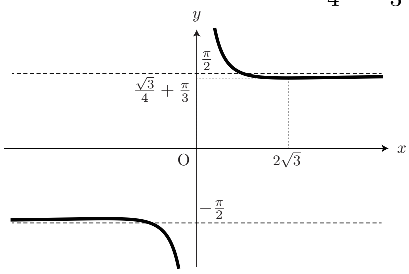
数学演習第一（第 5 回）微積：極値, 関数の増減, ロピタルの定理 ［解答例］

2018 年 5 月 30 日 実施分

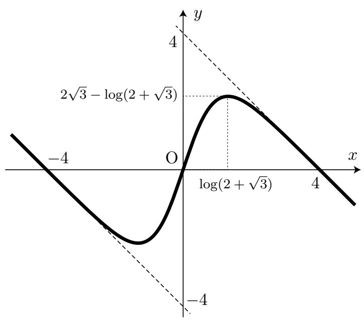
$\boxed{1}$ (1) $f(x)$ は $x \neq 0$ で定義された奇関数 (具体的な計算は $x > 0$ だけで行えばよい). まず, $\displaystyle\lim_{x\to -0} f(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to +0} f(x) = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\displaystyle\lim_{x\to \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$. $\displaystyle f'(x) = -\frac{3}{2x^2} + \frac{1/2}{1+(x/2)^2} = \frac{x^2-12}{2x^2(x^2+4)}$ より, $f(x)$ の増減は以下の通り. よって, 極小値 $\displaystyle f(2\sqrt{3}) = \frac{3}{4\sqrt{3}} + \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}$, 極大値 $\displaystyle f(-2\sqrt{3}) = -f(2\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$.

x	$-\infty$	$\cdots$	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	-0	$+0$	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{3}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



(2) $\displaystyle f(x) = 4\tanh x - x = \frac{4(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} - x$ は実数全体 $\mathbb{R}$ を定義域とする奇関数. また, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \tanh x = \pm 1$ だから $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x) - (\pm 4 - x)\} = 0$. このことは $x \to \pm\infty$ のとき $y = f(x)$ のグラフが直線 $y = \pm 4 - x$ (複号同順) に漸近することを意味する. $f(x)$ が奇関数だから, 増減については $x \geqq 0$ の範囲で調べれば十分. $\displaystyle f'(x) = \frac{4}{\cosh^2 x} - 1 = 0$ とすると, $\cosh^2 x = 4$ であり, $\cosh x \geqq \sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 1$ より, $\cosh x = 2$ すなわち $\displaystyle\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$ となる. ここで, $t = e^x$ とすると $t^2 - 4t + 1 = 0$ と整理される. $x \geqq 0$ ($\Leftrightarrow$ $t \geqq 1$) の範囲では $t = 2 + \sqrt{3}$ となり, これは $x = \log(2+\sqrt{3})$ に対応する. この値を境に $f'(x)$ の符号は正から負に変化する. 以上の考察から $f(x)$ の増減は次の通り.

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\log(2+\sqrt{3})$	$\cdots$	$\log(2+\sqrt{3})$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$-\infty$



極大値を求めるときは $t = e^x = 2+\sqrt{3}$ と $t^{-1} = 2 - \sqrt{3}$ を用いて, 極大値 $\displaystyle f(\log(2+\sqrt{3})) = 4\left.\frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1}}\right|_{t=2+\sqrt{3}} - \log(2+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - \log(2+\sqrt{3})$.
極小値は $f(-\log(2+\sqrt{3})) = -f(\log(2+\sqrt{3})) = -2\sqrt{3} + \log(2+\sqrt{3})$.

$\boxed{2}$ 以下では, ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で示した. また, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)$ が収束すれば $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$ が成り立つという事実も計算を軽減してくれる (用いた箇所を $\overset{\diamond}{=}$ で示した).

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x-1)-\log(x+1)}{\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{(x-1)(x+1)} = -2.$

【別解】$\displaystyle y = \frac{1}{x}$ とおけば, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\frac{x-1}{x+1} = \lim_{y\to 0}\frac{\log(1-y)-\log(1+y)}{y} = -\lim_{y\to 0}\frac{\log(1-y)}{-y} - \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = -2.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^3}{x} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{3(\log x)^2}{x} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{6\log x}{x} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{6}{x} = 0.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{x - \log x - 1} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x^x(\log x + 1) - 1}{1 - \frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x^x(\log x+1)^2 + x^{x-1}}{\frac{1}{x^2}} = 2.$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}x}{\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1.$

【別解】$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}x$ とおけば, (与式) $\displaystyle = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\tan\theta\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \lim_{\phi\to+0}\left(\frac{\phi}{\sin\phi}\cdot\cos\phi\right) = 1$ ($\displaystyle\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$ とした).

(5) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ とおけば, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ よって, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\log f(x)} = e^0 = 1.$

(6) $\displaystyle f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ とおけば, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\log f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(a^x+b^x) - \log 2}{x} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{a^x\log a + b^x\log b}{a^x + b^x} = \frac{\log a + \log b}{2} = \log\sqrt{ab}$. よって, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{\log f(x)} = e^{\log\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$

【別解】$\displaystyle y = \frac{a^x + b^x}{2} - 1$ とおけば, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\log\frac{a^x+b^x}{2}}{\frac{a^x+b^x}{2}-1}\cdot\left(\frac{a^x-1}{x} + \frac{b^x-1}{x}\right) \overset{\diamond}{=} \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}\cdot\lim_{x\to+0}\left(\frac{a^x-1}{x} + \frac{b^x-1}{x}\right) = \frac{\log a + \log b}{2} = \log\sqrt{ab}.$

$\boxed{3}$ ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で示した.

(1) $p>0$ より $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^p\log x=\infty$. 一方, $\lim_{x\to+0} f(x)$ については, $f(x)$ を分数の形にしてからロピタルの定理を使うと, $\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x^p}}\overset{\star}{=}\lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{(\frac{1}{x^p})'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{p}{x^{p+1}}}=-\frac{1}{p}\lim_{x\to+0}x^p=0.$

(2) $f'(x)=(x^p)'\log x+x^p(\log x)'=x^{p-1}(p\log x+1)$ にある指数 $p-1$ に着目して, p と 1 との大小によって状況が変わることを察知しよう. まず, $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ については, $p\geqq 1$ のとき $p-1\geqq 0$ だから, $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$. 一方, $0<p<1$ のときは, $1-p>0$ に注意して, ロピタルの定理を使うと, $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{p\log x+1}{x^{1-p}}\overset{\star}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(p\log x+1)'}{(x^{1-p})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{p}{x}}{(1-p)x^{-p}}=\frac{p}{1-p}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1-p}}=0.$ したがって, $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\begin{cases}\infty & (p\geqq 1)\\ 0 & (0<p<1)\end{cases}$

次に, $\lim_{x\to+0} f'(x)$ については, $p>1$ のとき $p-1>0$ だから, (1) より $\lim_{x\to+0}x^{p-1}\log x=0$. 故に, $\lim_{x\to+0} f'(x)=0$. $0<p\leqq 1$ のときは $p-1\leqq 0$ だから, $\lim_{x\to+0}x^{p-1}=\infty\ (0<p<1),=1\ (p=1)$. このことと $\lim_{x\to+0}\log x=-\infty$ を併せると, $\lim_{x\to+0} f'(x)=\lim_{x\to+0}x^{p-1}(p\log x+1)=-\infty$. したがって, $\lim_{x\to+0} f'(x)=\begin{cases}0 & (p>1)\\ -\infty & (0<p\leqq 1)\end{cases}$

(3) $f'(x)=x^{p-1}(p\log x+1)$ は, $\log x=-\frac{1}{p}$ 即ち $x=e^{-\frac{1}{p}}$ で負から正に符号変化する. したがって, $f(x)\ (x>0)$ は $x=e^{-\frac{1}{p}}$ で減少から増加に転じ, 極小値 $f(e^{-\frac{1}{p}})=(e^{-\frac{1}{p}})^p\log e^{-\frac{1}{p}}=e^{-1}\left(-\frac{1}{p}\right)=-\frac{1}{pe}$ をとる (増減表は省略).

(4) $g(x)=x^{x^p}$ の底を e に変換すると, $g(x)=e^{\log x^{x^p}}=e^{x^p\log x}=e^{f(x)}$ と表される. したがって, (1) の結果と指数関数の連続性より, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$, $\lim_{x\to+0} g(x)=e^{\lim_{x\to+0}f(x)}=e^0=1$ (前者については底を変換するまでもない). 合成関数の微分法より, $g'(x)=e^{f(x)}f'(x)=g(x)f'(x)=x^{x^p}x^{p-1}(p\log x+1)=x^{x^p+p-1}(p\log x+1)$ と表される. このとき $\lim_{x\to\infty}x^{x^p+p-1}=\infty$ に注意すると, $\lim_{x\to\infty}g'(x)=\infty$ が分かる. $\lim_{x\to+0}g'(x)$ については, $\lim_{x\to+0}g(x)=1$ および (2) の結果より, $\lim_{x\to+0}g'(x)=\lim_{x\to+0}g(x)f'(x)=(\lim_{x\to+0}g(x))(\lim_{x\to+0}f'(x))=\begin{cases}0 & (p>1)\\ -\infty & (0<p\leqq 1)\end{cases}$

$g'(x)=g(x)f'(x)$ において $g(x)>0\ (x>0)$ より, $g'(x)$ も $f'(x)$ と同様に $x=e^{-\frac{1}{p}}$ で負から正に符号変化する. したがって, $g(x)\ (x>0)$ は $x=e^{-\frac{1}{p}}$ で減少から増加に転じ, 極小値 $g(e^{-\frac{1}{p}})=e^{f(e^{-\frac{1}{p}})}=e^{-\frac{1}{pe}}$ をとる.

【注意】$y=f(x)$ や $y=g(x)$ のグラフを描いておくこと. その際, グラフの形状が, $p>0$ の値に応じて, どのように変遷するか考えよう. 特に, (2) や (4) の解答を参照の上, $p=1$ を境にした $x\to+0$ や $x\to\infty$ での接線の傾きの変化に注意すること. また, 余力ある諸君は, $p<0$ のケースを考察してみよう.

$\boxed{4}$ ここでも, ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で示した.

(1) $h(x)=e^x-x-1$ とおけば, $h'(x)=e^x-1$ より, $x\gtreqless 0$ のとき $h'(x)\gtreqless 0$ (不等号同順) となる. よって, $h(x)$ が $x<0$ で単調減少し, $x=0$ で値 0 をとり, $x>0$ で単調増加する. これで, $h(x)\geq 0$ ($x=0$ で等号) が示された.

(2) $g(x)$ は $x\neq 0$ では明らかに連続であるから, $g(x)$ が $x=0$ で連続となるように $g(0)$ の値を定めればよい. 従って, $g(0)=\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-x-1}\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x-1}\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x}=2$. (最後の $\overset{\star}{=}$ でロピタルの定理を用いたが, ここでは指数関数の基本的性質 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ ($\{e^x\}'=e^x$ の根拠) を用いる方がよいのかも知れない.)

(3) $g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{e^x-x-1}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2(e^x-x-1)}{x(e^x-x-1)}\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2(e^x-x-1)}{(e^x-x-1)+x(e^x-1)}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{1+\frac{x(e^x-1)}{e^x-x-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{1+g(x)\cdot\frac{e^x-1}{x}}=\frac{-2}{1+g(0)}=-\frac{2}{3}.$

(このような変形の工夫をしなくても, ロピタルの定理を 3 回繰り返せば結果は得られる.)

また, $x\neq 0$ のとき, $g'(x)=\frac{2x(e^x-x-1)-x^2(e^x-1)}{(e^x-x-1)^2}=-\frac{(x^2-2x)e^x+x^2+2x}{(e^x-x-1)^2}$ であるから, 導関数は

$g'(x)=\begin{cases}-\frac{(x^2-2x)e^x+x^2+2x}{(e^x-x-1)^2} & (x\neq 0)\\ -\frac{2}{3} & (x=0)\end{cases}$ で与えられる.

(4) $g'(x)$ の $x=0$ での連続性だけが問題となる. $g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}g'(x)$ であるから, $g'(x)$ は確かに $x=0$ で連続である. ($g'(x)$ の $x\neq 0$ での具体形を用いても, $\lim_{x\to 0}g'(x)$ にロピタルの定理を 4 回繰り返せば結果は得られる.)

【注意】上の論法から次の事実が分かる: 一般に, 連続関数 $\varphi(x)$ が $x=a$ を除いて微分可能であることが分かっているとき, $\lim_{x\to a}\varphi'(x)$ が存在すれば, 実は $\varphi'(a)$ が存在し ($x=a$ でも微分可能), しかも $\varphi'(x)$ は $x=a$ で連続となる.