

数学演習第一（第5回）

微積：極値、関数の増減、ロピタルの定理

2018年5月30日 実施

1 次の関数の増減を調べて極値を求めよ.

$$(1) f(x) = \frac{3}{2x} + \tan^{-1} \frac{x}{2} \qquad (2) f(x) = 4 \tanh x - x$$

ただし, $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ である.

2 演習書 問題 3.2.2 ((2), (5) は改題)

次の極限値を求めよ. ただし, a, b は正の定数とする.

$$\begin{array}{ll} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \frac{x-1}{x+1} & (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^3}{x} \\ (3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{x - \log x - 1} & (4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right) \\ (5) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} & (6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

3 関数 $f(x) = x^p \log x$ (p は正定数) に対して, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ をそれぞれ求めよ.
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x), \lim_{x \rightarrow +0} f'(x)$ をそれぞれ求めよ.
- (3) $f(x)$ の増減を調べて極値を求めよ.
- (4) $f(x)$ の代わりに $g(x) = x^{x^p}$ として, (1)~(3) に答えよ.

4 関数 $g(x) = \frac{x^2}{e^x - x - 1}$ ($x \neq 0$) について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $e^x - x - 1 \geq 0$ (等号は $x = 0$ のとき) が成り立つことを示せ.
- (2) $g(x)$ が $\mathbb{R}$ 上の連続関数となるように $g(0)$ の値を定めよ.
- (3) $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $g(x)$ の $x = 0$ での微分可能性を示し, 導関数 $g'(x)$ を求めよ.
- (4) $g(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で C^1 級, すなわち $g'(x)$ が連続であることを示せ.