

- 1 (1) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + \frac{1}{2}x_4 = -3 \\ x_3 - x_4 = 2 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$
 と簡約化されるので、主成分に関係しない変数を $x_2 = s$, $x_4 = t$ (s, t は任意定数) とおいて、この式に代入し、 s, t のある項は移行して ($x_2 = s, x_4 = t$ も併せて) 書くと、解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 4s - \frac{1}{2}t \\ s \\ 2 + t \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

[注] 解の表示に分数が現れないように $x_4 = 2t$ とおいてもよい ((2) の解答例ではそのようにした).

- (2) $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{x}_0$ ($\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^5$) とおく. このとき, $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow A(\mathbf{c} + \mathbf{x}_0) = \mathbf{b} \Leftrightarrow A\mathbf{c} + A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} + A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} \Leftrightarrow A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

故に, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 | A\mathbf{x} = \mathbf{b}\} = \mathbf{c} + \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ である. (1) の結果から, $\mathbf{c}$ として $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ がとることができ, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の

解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

であることがわかる.

[注] ここで、任意定数が 2 つあるので、解の自由度は 2 である. また、この方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の任意の解は、解 $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ の 1 次結合で一意的に表されているので、この 2 つの解を この方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解と呼ぶ. (線形教科書 p. 56 参照).

- 2 拡大係数行列を行基本変形の繰り返し (掃き出し法) により簡約行列まで変形して、連立 1 次方程式の解を求める.

$$\begin{aligned} 8.2.9 (1) \quad & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 21 \\ 1 & 2 & 1 & 14 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 21 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}. \quad \text{よって, } x = 3, y = 7, z = -3. \end{aligned}$$

$$8.2.10 (1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 35 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

主成分に対応しない変数 x_3 を任意定数 t として、解は $x_1 = 35 + 8t, x_2 = -22 - 5t, x_3 = t$.

$$8.2.10 (2) \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & -6 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

主成分に対応しない変数 x_2, x_3 をそれぞれ s, t として、解は $x_1 = 3 + 2s + 3t, x_2 = s, x_3 = t$.

$$8.2.10 (3) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

よって、(係数行列の階数) $\neq$ (拡大係数行列の階数) なので、解なし.

- 3 (1) 与えられた連立 1 次方程式は $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ と書ける. よって、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 12 \\ 19 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{12}{11} \\ \frac{19}{11} \end{bmatrix}.$$

解法の指定がなければ、勿論、拡大係数行列を簡約化して解いてもよい.

- (2) 拡大係数行列を簡約化して、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 11 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 13 & 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -5 & -11 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & -11 & -3 \\ 0 & -2 & -10 & -2 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

方程式は $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = -4 \\ x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので、求める解は $x_3 = t$ において

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 2t \\ 3 - 5t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

4 係数行列を簡約化して解を求める.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & -11 & -11 \\ 0 & 15 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ であるから, 方程式は } \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \text{ と簡約化されるの}$$

で, 解は $z = t$ において $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (t は任意定数). よって, 基本解は $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ で, 解の自由度は 1.

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ であるから, 方程式は}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \text{ と簡約化されるので, 解は } x_3 = 2s, x_4 = t \text{ において } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s - t \\ 2s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(s, t は任意定数). よって, 基本解は $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で, 解の自由度は 2.

$$5 (1) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 2 & 8 & a^2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & 2 & a^2+2 & a+2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & a(a-2) & a-2 \end{bmatrix}.$$

• $a = 0$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ となり, 係数行列の階数は 2, 拡大係数行列の階数は 3.

• $a = 2$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり, 係数行列, 拡大係数行列ともに階数は 2.

• $a \neq 0, 2$ のとき, 係数行列, 拡大係数行列ともに階数は 3.

[注] 階数を求めるだけなら上の形まで変形すれば十分. (勿論, 簡約行列まで求めてもよい.)

(2) • $a = 0$ のとき, $2 = (\text{係数行列の階数}) < (\text{拡大係数行列の階数}) = 3$ なので解なし.

• $a = 2$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから, 解は無数にあり, その解は $x = -7 + 10t$, $y = 2 - 3t$, $z = t$ (t は任意定数).

• $a \neq 0, 2$ のとき,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & a(a-2) & a-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/a - 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 - 1/a \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/a - 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 - 1/a \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \end{bmatrix}$$

であるから, 解はただ 1 つで, $x = \frac{4}{a} - 4$, $y = 1 - \frac{1}{a}$, $z = \frac{1}{a}$.

(3) • $a = 0$ のとき, 解は空集合. • $a = 2$ のとき, 解は直線 $\frac{x+7}{10} = \frac{y-2}{-3} = z$.

• $a \neq 0, 2$ のとき, 解は点 $(\frac{4}{a} - 4, 1 - \frac{1}{a}, \frac{1}{a})$.

6 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の 1 次関係式 $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ は c_1, c_2, c_3, c_4 を未知数 (変数) とする同次連立 1 次方程式

$$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (*)$$

と見なせる. 係数行列を簡約化すると,

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & k+2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & k+2 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が 1 次独立とは (*) の解が $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ に限られることであるから, 求める条件は $k \neq 1$.

(2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が 1 次従属とは (*) が自明でない解をもつことであるから, 求める条件は $k = 1$. このとき (*) の解は $c_1 = -t$, $c_2 = t$, $c_3 = -t$, $c_4 = t$ (t は任意定数). 特に, $t = -1$ と選び, 非自明な 1 次関係式 $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ を得る.