

数学演習第一 (演習第7回) 【解答例】

微積：高次の導関数, テーラーの定理, 有限テーラー展開 2018 年 6 月 20 日

1 n の範囲が書いてないものは $n = 0$ でも正しい.

$$(1) y^{(n)} = e^x. \quad (2) y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}. \quad (3) y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} \quad (n \geq 1). \quad (4) y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \quad (5) y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$(6) y' = f'(ax+b) \cdot \{ax+b\}' = af'(ax+b). \text{ これを繰り返して, } y^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

$$(7) (3) \text{ と } (6) \text{ の結果を使うと, } y^{(n)} = (-3)^n \cdot \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(2-3x)^n} = -\frac{3^n (n-1)!}{(2-3x)^n} \quad (n \geq 1).$$

$$(8) (5) \text{ と } (6) \text{ の結果を使うと, } y^{(n)} = \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \right\}^{(n)} = -\frac{1}{2} \{\cos 2x\}^{(n)} = -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n \geq 1).$$

$$(9) \frac{1}{1+x-2x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} \right) \text{ と部分分数分解し, } (2) \text{ と } (6) \text{ の結果を用いて,}$$

$$y^{(n)} = \left\{ \frac{1}{1+x-2x^2} \right\}^{(n)} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{2 \cdot 2^n \cdot (-1)^n n!}{(1+2x)^{n+1}} \right\} = \frac{n!}{3} \left\{ \frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{2(-2)^n}{(1+2x)^{n+1}} \right\}.$$

$$(10) y = x^2 e^{-2x} \text{ より, } y' = 2xe^{-2x} + x^2(-2e^{-2x}) = -2(x^2 - x)e^{-2x}. \quad n \geq 2 \text{ のときは Leibniz の公式を用いて,}$$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \{x^2\}^{(k)} \{e^{-2x}\}^{(n-k)} = x^2 \{e^{-2x}\}^{(n)} + n \cdot 2x \{e^{-2x}\}^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \{e^{-2x}\}^{(n-2)} \\ = \{(-2)^n x^2 + 2n(-2)^{n-1} x + n(n-1)(-2)^{n-2}\} e^{-2x} = (-2)^n \left\{ x^2 - nx + \frac{1}{4} n(n-1) \right\} e^{-2x}. \quad (n = 0, 1 \text{ でも正しい})$$

$$(11) y = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \text{ より, } y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right) (1+x)^{-\frac{1}{2}-n}. \quad \text{ここで,}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n} \text{ より, } y^{(n)} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n (1+x)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

$$(12) y = e^{-x} \sin x \text{ より, } y' = e^{-x}(-\sin x + \cos x) = \sqrt{2} e^{-x} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} e^{-x} \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \left(= -\sqrt{2} e^{-x} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right). \text{ これを繰り返して, } y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^{-x} \sin\left(x + \frac{3n\pi}{4}\right) \left(= (-\sqrt{2})^n e^{-x} \sin\left(x - \frac{n\pi}{4}\right) \right). \text{ Leibniz の公式を用いた表現も比較のため書くと } y^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \{e^{-x}\}^{(n-k)} \{\sin x\}^{(k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{-x} \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).$$

2 (1) $f(x) = e^x$ より $f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1 \quad (n \geq 0)$. よって, $e^x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{e^{\theta x}}{N!} x^N \quad (0 < \theta < 1)$.

特に, $N = 6$ なら, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + R_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + R_6(x)$.

(2) $f(x) = \sin x$ より $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n = 2m) \\ (-1)^m & (n = 2m+1) \end{cases} \quad (n \geq 0)$. よって,

$$\sin x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_{2M+1}(x), \quad R_{2M+1}(x) = \frac{(-1)^M \cos \theta x}{(2M+1)!} x^{2M+1} \quad (0 < \theta < 1). \quad (\text{例題 3.8 解説参照})$$

特に, $N = 6$ なら, $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_6(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + R_6(x)$.

(3) $f(x) = \cos x$ より $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^m & (n = 2m) \\ 0 & (n = 2m+1) \end{cases} \quad (n \geq 0)$. よって,

$$\cos x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + R_{2M}(x), \quad R_{2M}(x) = \frac{(-1)^M \cos \theta x}{(2M)!} x^{2M} \quad (0 < \theta < 1).$$

特に, $N = 6$ なら, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_6(x)$.

(4) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ より, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \quad (n \geq 0)$. これより, $f^{(n)}(0) = (-1)^n n! \quad (n \geq 0)$. よって, $x > -1$ に対して

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+1}} \quad (0 < \theta < 1).$$

特に, $N = 6$ なら, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + R_6(x)$. 【注】等比数列の和の公式により $R_N(x) = \frac{(-x)^N}{1+x}$ が成立.

(5) $f(x) = \log(1+x)$ より, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \geq 1)$. これより, $f(0) = 0, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad (n \geq 1)$.

よって, $x > -1$ に対して, $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{(-1)^{N-1}}{N(1+\theta x)^N} x^N \quad (0 < \theta < 1)$. 特に, $N = 6$

なら, $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + R_6(x)$.

(6) [2] (4) の結果を用いて, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}$, $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n}$, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$ ($n \geq 0$).
 よって, $x > -1$ に対して, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + R_N(x)$, $R_N(x) = \frac{(2N-1)!!}{(2N)!!} \frac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+\frac{1}{2}}}$ ($0 < \theta < 1$).
 特に, $N=6$ なら, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + R_6(x)$.

【注】 剰余項 $R_N(x)$ を評価するなどして, (1) から (6) までの関数は無限級数に表すことができることが分かる ((4) から (6) は範囲が制限される).

(1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, (2) $\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$, (3) $\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$, (4) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ ($-1 < x < 1$),
 (5) $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ ($-1 < x \leq 1$), (6) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$ ($-1 < x \leq 1$).

3 (1) $\{a^x\}^{(n)} = (\log a)^n a^x$ を用いて, $a^x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\log a)^n a}{n!} (x-1)^n + R_N(x)$, $R_N(x) = \frac{(\log a)^N a^{1+\theta(x-1)}}{N!} (x-1)^N$ ($0 < \theta < 1$).
 (2) $\{x^p\}^{(n)} = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$ ($n \leq p$), $= 0$ ($n > p$) より, $x^p = \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} (x-1)^n$. (N 次剰余項は 0)

4 (1) $\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x)$ (合成関数の微分公式) の微分に, 積・合成関数の微分公式を適用して,

$$\begin{aligned} \{g(f(x))\}'' &= \{g'(f(x)) \cdot f'(x)\}' = \{g'(f(x))\}' \cdot f'(x) + g'(f(x)) \cdot f''(x) \\ &= g''(f(x))f'(x) \cdot f'(x) + g'(f(x))f''(x) = g''(f(x))f'(x)^2 + g'(f(x))f''(x). \end{aligned}$$

 変数の関係 (z は y の関数, y は x の関数, 合成して z は x の関数) で上の計算を表現すれば, $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$ から出発して,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dy} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dy} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dy} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{dz}{dy} \frac{d^2y}{dx^2}.$$

 (2) 導関数の計算まで含めて説明する. まず, 仮定により $t = \varphi^{-1}(x)$ であるから $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ と書ける. よって, y を x で微分すれば, 合成関数・逆関数の微分公式を用いて,

$$y' = \{\psi(\varphi^{-1}(x))\}' = \psi'(\varphi^{-1}(x))\{\varphi^{-1}(x)\}' = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}.$$

すなわち $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ が成り立つ. 次に, $\omega(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ とおけば, $y' = \omega(\varphi^{-1}(x))$ と書けるから, 上と同じ論法で
 $y'' = \{\omega(\varphi^{-1}(x))\}' = \frac{\omega'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$. ここで, $\omega'(t) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)^2}$ より,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\varphi(t)} = \frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3}.$$

変数の関係 (y は t の関数, t は x の関数 (= $[x$ は t の関数] の逆関数), 合成して y は x の関数) で上の計算を表現すれば,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

5 (1) 最初に $\{f(-x)\}^{(n)} = (-1)^n f^{(n)}(-x) = \pm f^{(n)}(-x)$ ($\pm$ は n が偶数なら $+$, 奇数なら $-$) に注意する.
 • $f(x)$ が奇関数のとき: $f(-x) = -f(x)$ の両辺を $2m$ 回微分して, $f^{(2m)}(-x) = -f^{(2m)}(x)$. これより $f^{(2m)}(0) = -f^{(2m)}(0)$, すなわち $f^{(2m)}(0) = 0$ が得られ, $a_{2m} = \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} = 0$.
 • $f(x)$ が偶関数のとき: $f(-x) = f(x)$ の両辺を $2m+1$ 回微分して, $-f^{(2m+1)}(-x) = f^{(2m+1)}(x)$. これより $-f^{(2m+1)}(0) = f^{(2m+1)}(0)$, すなわち $f^{(2m+1)}(0) = 0$ が得られ, $a_{2m+1} = \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = 0$.
 (2) ① $f(x) = \sin^{-1}x$ より, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$. これより,
 $(1-x^2)f''(x) = x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = xf'(x)$. ② 1 回微分すると $(1-x^2)f'''(x) - 2xf''(x) = xf''(x) + f'(x)$. これを整理して,
 $(1-x^2)f'''(x) - 3xf''(x) - f'(x) = 0$. n 回 ($n \geq 2$) 微分すると Leibniz の公式により $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) + n \cdot (-2x)f^{(n+1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-2)f^{(n)}(x) = xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x)$. これを整理して, $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0$.
 よって, すべての $n \geq 0$ に対して関係式が示された ($n=0$ のときは明らか). ③ $n = 2m-1$ ($m \geq 1$) の場合の②の関係式に
 $x=0$ を代入して, $f^{(2m+1)}(0) = (2m-1)^2 f^{(2m-1)}(0)$. この関係式を繰り返し用いて, $f^{(2m+1)}(0) = (2m-1)^2 f^{(2m-1)}(0) = \dots = (2m-1)^2 \dots 3^2 \cdot 1^2 f'(0) = \{(2m-1)!!\}^2$ ($m \geq 1$). ここで, $f'(0) = 1$ を用いた. $(-1)!! = 1$ に注意すれば,
 $f^{(2m+1)}(0) = \{(2m-1)!!\}^2$ ($m \geq 0$). ④ $a_{2m+1} = \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = \frac{\{(2m-1)!!\}^2}{(2m)!! \cdot (2m+1)!!} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{1}{2m+1}$.

【注】 $\sin^{-1}x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$ ($-1 \leq x \leq 1$) が成り立つことが知られている.