

数学演習第一 (演習第7回)

微積：高次の導関数，テーラーの定理，有限テーラー展開

2018 年 6 月 20 日

1 次の x の関数 y の n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ. (問題 3.2.5 類題)

$$(1) y = e^x \quad (2) y = 1/x \quad (3) y = \log x \quad (4) y = \sin x \quad (5) y = \cos x$$

導関数を (4) では $\sin$ を使って書き, (5) では $\cos$ を使って書くと $y^{(n)}$ が統一的に記述できる. 教科書 p.40 例 3 参照.

$$(6) y = f(ax + b) \quad (f \text{ は } C^\infty \text{ 級, } a, b \text{ は定数で } a \neq 0) \quad (7) y = \log(2 - 3x) \quad ((3) \text{ と } (6) \text{ を使う})$$

$$(8) y = \sin^2 x \quad (\cos 2x \text{ で表し } (5) \text{ と } (6) \text{ を使う}) \quad (9) y = \frac{1}{1 + x - 2x^2} \quad (\text{部分分数分解して } (2) \text{ と } (6) \text{ を使う})$$

$$(10) y = x^2 e^{-2x} \quad (\text{Leibniz の公式}) \quad (11) y = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad (\text{下記の 2 重階乗を用いて表せ})$$

$$(12) y = e^{-x} \sin x \quad (\text{導関数を } \cos \text{ を使わず } \sin \text{ を使った式に変形すると } y^{(n)} \text{ が見やすい式になる})$$

但し, n の 2 重階乗 $n!!$ は

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots n & (n \text{ 以下の奇数の積}) & \text{if } n \geq 1 : \text{奇数} \\ 2 \cdot 4 \cdots n & (n \text{ 以下の偶数の積}) & \text{if } n \geq 2 : \text{偶数} \end{cases} \quad \text{および } (-1)!! = 0!! = 1$$

で定義される. (従って, 例えば $n! = (n-1)!! \cdot n!!$, $(2n)!! = 2^n n!$ ($n \geq 0$) が成り立つ.)

2 次の各関数 $f(x)$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を計算し, 有限 Maclaurin 展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N \quad (0 < \theta < 1) \quad \theta \text{ は } N, x \text{ に依存}$$

を書け ((2), (3) の N は指示の形). 更に, $N = 6$ の場合を具体的な数字を使って表せ ($R_6(x)$ の具体形は不要).

$$(1) f(x) = e^x \quad (2) f(x) = \sin x \quad (N = 2M + 1) \quad (3) f(x) = \cos x \quad (N = 2M)$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (5) f(x) = \log(1+x) \quad (6) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad ((4) \text{ から } (6) \text{ は } x > -1 \text{ の範囲で考える})$$

3 2 つの関数 a^x, x^p ($a > 0, p \in \mathbb{N}$) に対して, $x = 1$ における有限 Taylor 展開を N 次 ($N > p$) の剰余項まで求めよ.

4 2 次導関数に関して, 以下の問いに答えよ. 但し, 現れる関数はすべて 2 回微分可能であるとする.

(1) $y = f(x), z = g(y)$ の合成関数 $z = g(f(x))$ の導関数は

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x) \quad \text{あるいは} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

で与えられる. 2 次導関数をそれぞれに対応する形で求めよ. (微積教科書 問題 2.3-3)

(2) $\varphi'(t) \neq 0$ のとき, $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ により y は x の関数となり, 導関数 $\frac{dy}{dx}$ が

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{あるいは} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

で与えられる. 2 次導関数をそれぞれに対応する形で求めよ.

5 $f(x)$ が 0 を含む開区間 I で C^∞ 級のとき, 任意の自然数 N に対して $f(x)$ は [2] で述べた形の有限 Maclaurin 展開をもつ. そこに現れる x^n の係数 $a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ が奇関数 (すなわち $f(-x) = -f(x)$) のとき $a_{2m} = 0$ となることを示せ. また, $f(x)$ が偶関数 (すなわち $f(-x) = f(x)$) のとき $a_{2m+1} = 0$ となることを示せ.

(2) 区間 $(-1, 1)$ 上の C^∞ 級の奇関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ に対して, ① $(1 - x^2)f''(x) = xf'(x)$ を示せ. ② 前式の両辺を n 回微分して次式を示せ:

$$(1 - x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n + 1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geq 0).$$

③ $f^{(2m+1)}(0) = \{(2m - 1)!!\}^2$ ($m \geq 0$) を示せ. ④ a_{2m+1} ($m \geq 0$) を求めよ.