

数学演習第一 (演習第8回) 【解答例】

微積：正則行列, 逆行列, 2 次または 3 次の行列式 2018 年 6 月 27 日

1

(1) 正方行列 A に対して, $AB = BA = E$ (E は単位行列) を満たす行列 B が存在するとき, B を A の逆行列と呼び A^{-1} で表す (逆行列は一意に定まる). また, 逆行列をもつ行列を正則行列と呼ぶ. n 次正方行列 A, B が正則ならば, A, B はそれぞれの逆行列 A^{-1}, B^{-1} をもち, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$. よって, $B^{-1}A^{-1}$ は AB の逆行列となり, AB が正則であることが分かる. (線形教科書 p. 59 系 2 を認めれば, 上の計算は一方だけで十分.)

(2) ① $\cos \theta \cdot r \cos \theta - (-r \sin \theta) \sin \theta = r \neq 0$ より, $\begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$ は逆行列をもち, $\begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} =$

$$\frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix} \text{ で与えられる.}$$

$$\textcircled{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \frac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}.$$

2

以下では, 行基本変形が何回か行われていることを $\rightarrow$ で表した. ($\boxed{P_i(c)}$, $\boxed{P_{ij}}$, $\boxed{P_{i_1j}(c_1) \cdots P_{i_kj}(c_k)}$ のいずれか 1 つにより得られる行基本変形を $\rightarrow$ で表すことが多いが, これらのいくつかの組み合わせを $\rightarrow$ で表すこともある. 紛らわしいので, ここでは記号 $\rightarrow$ を導入して区別した.)

$$(1) \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{array} \right] \text{ より, } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}. (\boxed{1}(2) \text{ の逆行列の公式を用いた方が計算は速い})$$

$$(2) \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -25 & -6 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{25}{6} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \text{ より, } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 11 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{25}{6} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$(3) \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right] \text{ より, } \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(5) \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

より, 逆行列は存在しない.

3

【考え方 1】 行基本変形は基本行列を左から掛けることにより実現されるから, $[A \ B]$ を $[E \ C]$ まで変形するのに実行した行基本変形に対応する基本行列の積を P と表せば, $P[A \ B] = [E \ C]$ と書ける. よって $PA = E$, $PB = C$ が成り立つので, 第 1 式から $P = A^{-1}$ (A は正則) が従い, これを第 2 式に代入して $C = A^{-1}B$ が得られる. 【考え方 2】 $[A \ B]$ が $[E \ C]$ まで行基本変形されたとき, A は E まで変形されるので正則. また, $B = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]$, $C = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]$ とすれば, $[A \ b_i]$ が $[E \ c_i]$ まで変形されるので $Ax = b_j$ の解は $x = c_j$ である ($j = 1, \dots, n$). まとめて考えれば, $AX = B$ の解が $X = C$ となるから, $C = A^{-1}B$ が成り立つ.

$$(1) [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & -3 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right] = [E|A^{-1}B]. \quad \therefore X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -6 & -5 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

(2) $YA = B$ の転置をとって, $YA = B$ と同値な行列方程式 ${}^tA{}^tY = {}^tB$ を得る.

$$[{}^tA|{}^tB] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -9 & 3 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & -3 \end{array} \right] = [E|({}^tA)^{-1}{}^tB] = [E|{}^t(BA^{-1})]. \quad \therefore Y = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 8 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

【注】列基本変形を用いれば, $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} E \\ BA^{-1} \end{bmatrix}$ となる (上の計算を転置して実行することに他ならない).

4

(1) $A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$ とすれば, tAA の (i, j) 成分は $a_i \cdot a_j$ で与えられる. よって, A が直交行列であることを示すには A の異なる 2 つの列が直交し, かつ各列の長さ (ノルム) が 1 であることを確かめればよい. 行列 Q はこの性質をもっている (計算省略) ので直交行列である. 従って,

$$Q^{-1} = {}^tQ = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) まず, P は Q の第 2 列を r 倍, 第 3 列を $r \sin \theta$ 倍して得られるから, 対角行列 $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \sin \theta \end{bmatrix}$ をと

れば, $P = QD$ が成り立つ. $r \sin \theta \neq 0$ のとき, $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \end{bmatrix}$ であるから, (1) の結果を用いて,

$$P^{-1} = (QD)^{-1} = D^{-1}Q^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} & \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} & -\frac{\sin \theta}{r} \\ -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} & 0 \end{bmatrix}.$$

A

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0. \quad (2) \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 3 \\ -1 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 5) + 3 = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda + 4).$$

$$(3) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2 - (-2) - 18 = -5. \quad (4) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ c & b & \lambda + a \end{vmatrix} = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

$$(5) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -1 \\ 1 & \lambda - 4 & -1 \\ -2 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4)\lambda - 4 - 4 + 4(\lambda + 1) + 2\lambda - 2(\lambda - 4) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2.$$

B

(1) $|\mathbf{a} \ \mathbf{b}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6$ より, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積は $|-6| = 6$. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る三角形の面積はその半分だから $6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

(2) $|\mathbf{p} \ \mathbf{q} \ \mathbf{r}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4$ より, $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ の作る平行六面体の体積は $|-4| = 4$. $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ の作る四面体は (平行六面体と比較して) 底面が三角形 (面積 $1/2$ 倍) の錐 (体積 $1/3$ 倍) となるので, この四面体の体積は $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

C

$$[1](2)② \text{ の結果より, } x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

(線形教科書 p.85 定理 12.8 参照)