数学演習第一（演習第９回）【解答例】

微積： 漸近展開, 積分の計算 (1)　　2018 年 7 月 4 日

$\boxed{0}$ 順に $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)}{x^n}=0}$, $\boxed{\dfrac{1}{n!}}$, $\boxed{\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}}$, $\boxed{\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}}$, $\boxed{\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}}$, $\boxed{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}$, $\boxed{(-1)^n}$.

$\boxed{1}$ (本問でランダウの記号 $o(x^n)$ を使うときはいつも，$x\to 0$ を省略している.)

(1) (d) $(\alpha=-\frac{1}{2})$ を用いて，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\dfrac{-\frac{1}{2}}{1!}x+\dfrac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2+o(x^2)=\boxed{1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3x^2}{8}+o(x^2)}$.

(2) (a) を用いて，$2^x=(e^{\log 2})^x=e^{(\log 2)x}=\boxed{1+(\log 2)x+\dfrac{(\log 2)^2}{2}x^2+o(x^2)}$.

(3) (a) より $e^{\pm x}=1\pm x+\dfrac{1}{2}x^2\pm\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{24}x^4\pm\dfrac{1}{120}x^5+o(x^5)$ (複号同順) であるから,

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\boxed{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)},\quad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\boxed{x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}.$$

(4) (c) より, $\log(2-x)=\log 2+\log\Big(1-\dfrac{x}{2}\Big)=\log 2+\Big(-\dfrac{x}{2}\Big)-\dfrac{1}{2}\Big(-\dfrac{x}{2}\Big)^2+o(x^2)=\boxed{\log 2-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+o(x^2)}$.

(5) 部分分数分解した後に (d) $(\alpha=-1)$ を用いて,

$$\frac{x}{2-x-x^2}=\frac{x}{(2+x)(1-x)}=\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{2+x}\Big)=\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\Big)$$
$$=\frac{1}{3}\Big\{\Big(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\Big)-\Big(1-\frac{x}{2}+\Big(\frac{x}{2}\Big)^2-\Big(\frac{x}{2}\Big)^3+o(x^3)\Big)\Big\}=\boxed{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{3x^3}{8}+o(x^3)}.$$

【別法】 $\dfrac{x}{2-x-x^2}=\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}}=\dfrac{x}{2}\Big(1+x+x^2+o(x^2)\Big)\Big(1-\dfrac{x}{2}+\Big(\dfrac{x}{2}\Big)^2+o(x^2)\Big)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3x^3}{8}+o(x^3)$.

(6) (b) より, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}+o(x^6)$. よって, $\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{x^4}{720}+o(x^4)}$.

(7) 半角の公式と (6) の結果を用いて,

$$\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2=\frac{\sin^2 x}{x^2}=2\cdot\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}=2\Big\{\frac{1}{2}-\frac{(2x)^2}{24}+\frac{(2x)^4}{720}+o(x^4)\Big\}=\boxed{1-\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{45}+o(x^4)}.$$

【別法】 $\Big(\dfrac{\sin x}{x}\Big)^2=\Big(1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+o(x^4)\Big)^2=1-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{2x^4}{45}+o(x^4)$.

(8) (c) より，$\log(1\pm x)=\pm x-\dfrac{x^2}{2}\pm\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}\pm\dfrac{x^5}{5}+o(x^5)$ (複号同順) であるから,

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\{\log(1+x)-\log(1-x)\}=\boxed{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)}.$$

(9) (a), (b) を用いて，$e^{-x}\cos x=\Big(1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\Big)\Big(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\Big)=\boxed{1-x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)}$.

(10) (b) より $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$ であるから, $\dfrac{1}{1+X}=1-X+X^2+o(X^2)$ $(X\to 0)$ を用いて,

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1+(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4))}=1-\Big(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\Big)+\Big(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\Big)^2+o(x^4)=\boxed{1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4)}.$$

【別法】 $\dfrac{1}{\cos x}$ は偶関数であるから $\dfrac{1}{\cos x}=a_0+a_2x^2+a_4x^4+o(x^4)$ と書ける. このとき, $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\cos x=1$ であるから,

$$1=(a_0+a_2x^2+a_4x^4+o(x^4))\Big(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\Big)=a_0+\Big(a_2-\frac{a_0}{2}\Big)x^2+\Big(a_4-\frac{a_2}{2}+\frac{a_0}{24}\Big)x^4+o(x^4).$$

$a_0=1$, $a_2-\dfrac{a_0}{2}=a_4-\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_0}{24}=0$ を解いて, $a_0=1$, $a_2=\dfrac{1}{2}$, $a_4=\dfrac{5}{24}$ を得る.

(11) (10) の結果と (b) を用いて,

$$\tan x=\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x=\Big(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4)\Big)\Big(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\Big)=\boxed{x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)}.$$

【別法】 $\tan x$ は奇関数であるから $\tan x=b_1x+b_3x^3+b_5x^5+o(x^5)$ と書ける. 後は $\tan x\cos x=\sin x$ という関係を用いて, (10) の【別法】と同じ議論を行えば b_1,b_3,b_5 の値が定まる.

(12) (b) より $\cos x=1+\Big(-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}+o(x^6)\Big)$ であるから, $\log(1+X)=X-\dfrac{X^2}{2}+\dfrac{X^3}{3}+o(X^3)$ $(X\to 0)$ を用いて,

$$\log(\cos x)=\Big(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\Big)-\frac{1}{2}\Big(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\Big)^2+\frac{1}{3}\Big(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Big)^3+o(x^6)$$
$$=\Big(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\Big)-\frac{1}{2}\Big(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}\Big)+\frac{1}{3}\Big(-\frac{x^6}{8}\Big)+o(x^6)=\boxed{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6)}.$$

【別法】 $\{\log(\cos x)\}'=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$ であるから, (11) の結果を用いて,

$$\log(\cos x)=-\int_0^x\tan t\,dt=-\int_0^x\Big(t+\frac{t^3}{3}+\frac{2t^5}{15}+o(t^5)\Big)\,dt=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6).$$

(13) $\mathrm{Tan}^{-1}\,x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \Big(1 - t^2 + t^4 + o(t^4)\Big)\,dt = \boxed{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}$.

(14) (1) の結果を用いて，$\mathrm{Sin}^{-1}\,x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \Big(1 - \frac{-t^2}{2} + \frac{3(-t^2)^2}{8} + o(t^4)\Big)\,dt = \boxed{x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)}$.

$\boxed{2}$ (1) (i) $\displaystyle\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$ (分母 $x^2\sin^2 x$ の漸近展開が x^4 の項から始まるから, 分子を $o(x^4)$ を用いて表す)

$$= \frac{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 - x^2(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2}{x^2(x + o(x))^2}$$

$$= \frac{(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)) - x^2(1 - x^2 + o(x^2))}{x^2(x^2 + o(x^2))} = \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{\frac{2}{3} + o(1)}{1 + o(1)} \to \boxed{\frac{2}{3}} \quad (x \to 0).$$

(ii) 分母 $x^2\log\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}x^2\log(1+x^2)$ の漸近展開は x^4 の項から始まるから, 分子を $o(x^4)$ を用いて表せばよい.

$$\frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cosh x}{x^2\log\sqrt{1+x^2}} = \frac{(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2})^2 + o(x^4)) - (1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))}{\frac{1}{2}x^2(x^2 + o(x^2))} = \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{1 + o(1)} \to \boxed{\frac{1}{6}} \quad (x \to 0).$$

(2) $\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)$ であるから，$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = e \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} =$ $e\Big\{1 + \Big(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3}\Big) + \dfrac{1}{2}\Big(-\dfrac{x}{2}\Big)^2 + o(x^2)\Big\} = e - \dfrac{e}{2}x + \dfrac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$. 故に, $\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^n = \boxed{e - \dfrac{e}{2n} + \dfrac{11e}{24n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)}$ $(n \to \infty)$.

$\boxed{3}$ (1) (前半の不定積分に対する積分定数は省略する.)

(i) $e^x = t$ とおけば $e^x\,dx = dt$ であるから, $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}\,dx = \int \frac{t}{t+1}\,dt = \int \Big(1 - \frac{1}{t+1}\Big)\,dt = \boxed{e^x - \log(e^x + 1)}$.

(ii) 部分積分法により,

$$\int x^2\log x\,dx = \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}(\log x)'\,dx = \frac{x^3\log x}{3} - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3\log x}{3} - \frac{x^3}{9} = \boxed{\frac{x^3}{9}(3\log x - 1)}.$$

(iii) $x^2 = t$ とおけば $x\,dx = \dfrac{dt}{2}$ であるから,

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx = \int te^{-t}\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\Big(-te^{-t} + \int e^{-t}\,dt\Big) = -\frac{1}{2}(t+1)e^{-t} = \boxed{-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}}.$$

(iv) $\sin x = t$ とおけば $\cos x\,dx = dt$ であるから,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\,dx = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\Big)\,dt = \frac{1}{2}\log\Big|\frac{1+t}{1-t}\Big| = \boxed{\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

(v) $x = \sin\theta$ とおけば $dx = \cos\theta\,d\theta$ であり, $\begin{array}{c||c} x & -\frac{1}{2} \to 1 \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{2} \end{array}$ と対応する. この範囲で, $\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$ であるから,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\Big[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \boxed{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}}.$$

【別法】この定積分はある図形 (半円の一部) の面積を表すので, その面積を図形的に計算すれば定積分の値が得られる.

(vi) 部分積分法により $I := \displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx = \Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx = \Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-x}(-\sin x)\,dx =$ $1 + e^{-\pi} - I$. よって, $I = \boxed{\dfrac{1+e^{-\pi}}{2}}$.

(vii) $\displaystyle\int_0^\pi |\sin x + \cos x|\,dx = \int_0^\pi \Big|\sqrt{2}\,\sin\Big(x + \frac{\pi}{4}\Big)\Big|\,dx = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin x|\,dx = \sqrt{2}\,\Big(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}(-\sin x)\,dx\Big)$

$$= \sqrt{2}\,\Big(\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\Big) = \sqrt{2}\Big\{-\Big(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) + \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\Big)\Big\} = \boxed{2\sqrt{2}}.$$

【別法】 $|\sin x|$ は周期 π の関数であるから, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin x|\,dx = \int_0^\pi |\sin x|\,dx = \int_0^\pi \sin x\,dx = 2.$

(viii) $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^\pi (\cos mx)(\cos nx)\,dx$ とおく. まず, $m \neq n$ のとき, 三角関数の積和の公式を用いて,

$$I_{m,n} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Big]_0^\pi = \boxed{0}.$$

$m = n \geqslant 1$ なら, $I_{n,n} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi (\cos 2nx + 1)\,dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin 2nx}{2n} + x\Big]_0^\pi = \boxed{\frac{\pi}{2}}$. $m = n = 0$ なら, $I_{0,0} = \displaystyle\int_0^\pi dx = \boxed{\pi}$.

(2) (i) $c > 1$ を定数として, $F(x) = \displaystyle\int_c^x \frac{dt}{\log t}$ $(x > 1)$ とおけば, $F'(x) = \dfrac{1}{\log x}$. よって, $f(x) = F(x^3) - F(x^2)$ に合成関数の微分法を適用することにより,

$$f'(x) = F'(x^3)\cdot 3x^2 - F'(x^2)\cdot 2x = \frac{1}{\log x^3}\cdot 3x^2 - \frac{1}{\log x^2}\cdot 2x = \boxed{\frac{x^2 - x}{\log x}}.$$

(ii) $g(x) = x\displaystyle\int_0^x \sin t\,dt - \int_0^x t\sin t\,dt$ であるから, $g'(x) = 1\cdot\displaystyle\int_0^x \sin t\,dt + x\cdot\sin x - x\sin x = \Big[-\cos t\Big]_0^x = \boxed{1 - \cos x}$.