数学演習第一 (演習第9回)

微積：漸近展開, 積分の計算 (1)

2018年7月4日

0

【確認問題】 空欄に適当な式を記入しながら, 今回の演習で必要となる予備知識を確認せよ.

ランダウの記号 (微積教科書 p.49 参照)

関数 $h(x)$ が を満たすとき, $h(x) = o(x^n)$ ($x \rightarrow 0$) と表す.

このとき, $x^m h(x) = o(x^{m+n})$ ($x \rightarrow 0$) であることに注意 (微積教科書 p.50 定理 2.4.4 参照).

漸近展開の要点

関数 $f(x)$ の $x = 0$ における N 次の漸近展開を求めることは,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N + o(x^N) \quad (x \rightarrow 0)$$

となる x の多項式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N$ を求めることである (このような多項式が存在するならば係数は一意に定まる). $f(x)$ が $x = 0$ の周りで C^N 級であれば, 微積教科書 定理 2.4.5 より $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ($n = 0, 1, \dots, N$) だから, (a)~(d) に挙げる代表的な関数は, $x \rightarrow 0$ で次のように漸近展開される.

(a) $e^x = \sum_{n=0}^N \text{} x^n + o(x^N)$

(b) $\cos x = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \text{} x^{2n} + o(x^N)$, $\sin x = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \text{} x^{2n+1} + o(x^N)$

記号 $\lfloor a \rfloor$ は a 以下の最大整数 (例えば, $N_1 = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ は $2N_1 \leq N$ を満たす最大整数) を表す.

(c) $\log(1+x) = \sum_{n=1}^N \text{} x^n + o(x^N)$

(d) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^N \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^N)$ 但し, $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{n} = \text{}$ ($n = 1, 2, \dots$)

特に, $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^N \text{} x^n + o(x^N)$ (微積教科書 p.46 問題 2.3 1(3), p.151 例題 6.2.1 参照)

(a)~(d) の関数を用いて表現される関数であっても, より複雑な関数 $f(x)$ に対しては, $f^{(n)}(0)$ を直接計算するのは大変になることが多い. しかし, $f^{(n)}(0)$ を直接計算しなくても, (a)~(d) の漸近展開を組み合わせることで $x = 0$ における漸近展開を求めることができる.

【例題】 $x = 0$ の周りで, 次の関数の 4 次の漸近展開を求めよ: (1) $\frac{\sin x}{1+x}$, (2) $e^{\cos x}$.

【解】 (1) $\frac{1}{1+x}$ の 3 次の漸近展開と $\sin x$ の 4 次の漸近展開を用いて ($\sin x$ の漸近展開は 1 次から始まる!),

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{1+x} &= \frac{1}{1+x} \cdot \sin x = (1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) \\ &= (1 - x + x^2 - x^3) \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + o(x^4) = x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

(2) $\cos x = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)$ ($x \rightarrow 0$), $e^{1+X} = e \cdot e^X = e \left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2) \right)$ ($X \rightarrow 0$) より,

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e \left\{ 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^2 + o(x^4) \right\} \\ &= e \left\{ 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \right\} + o(x^4) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

1 (漸近展開)

次の関数の $x \rightarrow 0$ における漸近展開を指定された次数まで求めよ. ただし, $\int_0^x o(t^n) dt = o(x^{n+1})$ ($x \rightarrow 0$) を用いてよい.

- (1) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ (2次) (2) 2^x (2次) (3) $\cosh x, \sinh x$ (5次)
 (4) $\log(2-x)$ (2次) (5) $\frac{x}{2-x-x^2}$ (3次) (6) $\frac{1-\cos x}{x^2}$ (4次)
 (7) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ (4次) (8) $\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ (5次) (9) $e^{-x}\cos x$ (3次)
 (10) $\frac{1}{\cos x}$ (4次) (11) $\tan x$ (5次) (12) $\log(\cos x)$ (6次)
 (13) $\text{Tan}^{-1} x \left(= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \right)$ (5次) (14) $\text{Sin}^{-1} x \left(= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right)$ (5次)

【注意】(9) から (12) 以外は N 次の漸近展開の形で求められるので, 余力のある人は是非試してもらいたい ((1), (14) では 2 重階乗を用いる). なお, 偶関数なら $2N$ 次, 奇関数なら $2N+1$ 次の漸近展開の形にするとよい.

2 (漸近展開の応用)

(1) 漸近展開を用いて次の極限值を求めよ.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) \qquad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cosh x}{x^2 \log \sqrt{1+x^2}}$$

(2) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ の $n \rightarrow \infty$ での漸近展開 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ を求めよ.

(ヒント: $x = 1/n$ とおき, $(1+x)^{1/x} = e^{\log(1+x)/x}$ の $x \rightarrow 0$ での漸近展開を考えよ.)

3 (高校程度の積分計算の復習)

(1) 次の不定積分・定積分を求めよ.

- (i) $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$ (ii) $\int x^2 \log x dx$
 (iii) $\int x^3 e^{-x^2} dx$ (iv) $\int \frac{dx}{\cos x}$
 (v) $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ (vi) $\int_0^\pi e^{-x} \sin x dx$
 (vii) $\int_0^\pi |\sin x + \cos x| dx$ (viii) $\int_0^\pi (\cos mx)(\cos nx) dx$ (m, n は 0 以上の整数)

(2) 次の定積分で表された関数の導関数を求めよ.

$$(i) f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\log t} \quad (x > 1) \qquad (ii) g(x) = \int_0^x (x-t) \sin t dt$$