数学演習第一（演習第 10 回）【解答例】

線形： 4 次以上の行列式　　2018 年 7 月 11 日

1

(1) 同じ行があれば行列式は 0 だから，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix} = 0.$

(2) 行列式は各行に関して線形だから，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}+\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ 2\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ 2\boldsymbol{d} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ 2\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ 2\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = 6.$

(3) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ 2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c} \\ 2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ 2\boldsymbol{b} \\ 2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c} \\ -3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ 2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c} \\ -3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c} \\ 4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ 4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ 3\boldsymbol{d} \end{vmatrix}$

$= -6\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = -18.$　　(4) $\det(2A) = \begin{vmatrix} 2\boldsymbol{a} \\ 2\boldsymbol{b} \\ 2\boldsymbol{c} \\ 2\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = 2^4\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = 48.$

(5) 転置しても行列式は変わらないから，$|{}^tA| = |A| = 3$. (転置しても行列式は変わらないことから，以下では，行について成り立つことは列についても成り立つことに注意する．)

2

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 16\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 96.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 12 & 13 & 1 & 5 \\ 11 & 16 & -1 & 6 \\ 10 & 9 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 11 & 11 & 0 & 1 \\ 12 & 18 & 0 & 10 \\ 11 & 11 & 0 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 1 \\ 12 & 18 & 10 \\ 11 & 11 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 1 \\ 12 & 18 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

$= 10\begin{vmatrix} 11 & 11 \\ 12 & 18 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 11 & 0 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 660.$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 8\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 32\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 32\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -128.$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ -5 & 11 & -9 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ -5 & 11 & -9 \end{vmatrix}$

$= 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ -5 & 11 & -4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 21\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -42$

3

(1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

(2) $A = [a_{ij}]\ (1 \leq i, j \leq 3)$, $\widetilde{a}_{ij}$ を (i, j) 余因子とする．

$\widetilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3,\quad \widetilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5,\quad \widetilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7,$

$\widetilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \widetilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5,\quad \widetilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7,$

$\widetilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3,\quad \widetilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5,\quad \widetilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7.$

よって A の余因子行列 $\widetilde{A} = {}^t[\widetilde{a}_{ij}]$ は $\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 5 & 5 & -5 \\ 7 & 7 & -7 \end{bmatrix}$.

4

(1) $|dE| = d^n$.

(2) 恒等式 $A\widetilde{A} = |A|E$ の両辺の行列式をとって $|A\widetilde{A}| = ||A|E|$．行列の積の行列式は行列式の積になるから，左辺 $= |A||\widetilde{A}|$．また，(1) より，右辺 $= |A|^n$．よって，$|A||\widetilde{A}| = |A|^n$．両辺を 0 でない多項式 $|A|$ で割り算して，$|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$．($A = [a_{ij}]$ とすると，$\widetilde{A}$ の各成分は n^2 個の変数 a_{ij} の多項式で，$|A|, |\widetilde{A}|$ ともに，n^2 個の変数 a_{ij} の多項式である．よって，上記のように，$|\widetilde{A}|$ と $|A|^{n-1}$ は，まず n^2 個の変数 a_{ij} の多項式として等しいことがわかり，従って，n^2 個の変数 a_{ij} にどんな値をいれても等しいことがわかる．)

5

$-t\boldsymbol{e} = w\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c} + z\boldsymbol{d}$ の両辺に $|\bullet, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}|$ を施して，$|-t\boldsymbol{e}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}| = |w\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c} + z\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}|$. 行列式は各列に関して線形で，同じ列があれば行列式はゼロだから，$|-t\boldsymbol{e}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}| = -t|\boldsymbol{e}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}|$ と

$$|w\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c} + z\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}| = w|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}| + x|\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}| + y|\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}| + z|\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}| = w|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}|$$

を得る．故に，$w|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}| = -t|\boldsymbol{e}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}|$．仮定から，$|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}| = 3$, $|\boldsymbol{e}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}| = 1$ だから，したがって，$w = -\dfrac{t}{3}$ となる．同様にして，$w\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c} + z\boldsymbol{d} = -t\boldsymbol{e}$ の両辺に $|\boldsymbol{a}, \bullet, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}|$ を施して，$x|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}| = -t|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}|$. 仮定から，$|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}| = 3$ だから，したがって，$x = -t$ となる．
同様にして，$y = -\dfrac{|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}|}t = -2t$，$z = -\dfrac{|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{e}|}{|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}|}t = 2t$.
(クラメルの公式，自明に思えるようになりましたか？)

6

(1) $|P_2| = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{vmatrix} = 1$ である．$n \geq 2$ なる自然数に対し，$\begin{vmatrix} P'_n \\ \boldsymbol{p}_n \end{vmatrix} = |P_n| = 1$ を仮定すると，$|P_{n+1}|$ を $n+1$ 列目で余因子展開することにより，

$$|P_{n+1}| = \begin{vmatrix} P'_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{p}_n\cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \boldsymbol{p}_n\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P'_n \\ \boldsymbol{p}_n\sin\theta_n \end{vmatrix}\sin\theta_n + \begin{vmatrix} P'_n \\ \boldsymbol{p}_n\cos\theta_n \end{vmatrix}\cos\theta_n = \begin{vmatrix} P'_n \\ \boldsymbol{p}_n \end{vmatrix}(\sin^2\theta_n + \cos^2\theta_n) = 1$$

となる．故に，帰納法により $n \geq 2$ なる自然数に対し $|P_n| = 1$ である．特に $|P_5| = 1$.

(因みに，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta_1 \\ r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \vdots \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{bmatrix}$ を n 次元での極座標変換とするとき，P_n は

$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ \vdots \\ dx_{n-1} \\ dx_n \end{bmatrix} = P_n \begin{bmatrix} dr \\ rd\theta_1 \\ r\sin\theta_1 d\theta_2 \\ \vdots \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}d\theta_{n-2} \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}d\theta_{n-1} \end{bmatrix}$ という形で現れる直交行列である．

(dx_i や dr, $d\theta_i$ は後期の微分積分学第二で学ぶ (全) 微分である．) P_n が直交行列であることは，n に関する帰納法でわかる．各自考えてみよ．)

(2) $$\begin{vmatrix} x & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & 1 \\ a_1 & x & b_{23} & b_{24} & b_{25} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & b_{34} & b_{35} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x & b_{45} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a_1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & 1 \\ 0 & x & b_{23} & b_{24} & b_{25} & 1 \\ 0 & a_2 & x & b_{34} & b_{35} & 1 \\ 0 & a_2 & a_3 & x & b_{45} & 1 \\ 0 & a_2 & a_3 & a_4 & x & 1 \\ 0 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 1 \end{vmatrix} = (x-a_1)\begin{vmatrix} x & b_{23} & b_{24} & b_{25} & 1 \\ a_2 & x & b_{34} & b_{35} & 1 \\ a_2 & a_3 & x & b_{45} & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & x & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 1 \end{vmatrix}$$

以下，同様にして，上式 $= (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)$.