

数学演習第一（演習第 10 回）

線形：4 次以上の行列式

2018 年 7 月 11 日

- 1 A を 4 次正方行列とし、 $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ を A の行ベクトル分割とする． A の行列式 $|A|$ の値が 3 であるとき、以下の行列式の値を求めよ．
- (1) 行列式 $\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ b \end{vmatrix}$ (2) 行列式 $\begin{vmatrix} a+c \\ b \\ c \\ 2d \end{vmatrix}$ (3) 行列式 $\begin{vmatrix} a & & & \\ & 2b-3a & & \\ & a+2b-c & & \\ & 2a-3b+4c+3d & & \end{vmatrix}$ (4) 行列式 $\det(2A)$ (5) $|{}^t A|$

- 2 演習書問題 9.3.2(3), 問題 9.3.3 を解け．(教科書 例題 10.7 が基本．教科書 p.77 にある列基本変形も有効．)
- (1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

- 3 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ．
- (1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ．
 (2) 余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ．

- 4 n 次正方行列 A の余因子行列を $\tilde{A}$, E を n 次単位行列とする．
- (1) $|dE|$ (d はスカラー) を d を用いて表せ． (2) $|\tilde{A}|$ を $|A|$ を用いて表せ．
 ((2) のヒント：恒等式 $A\tilde{A} = |A|E$ の両辺の行列式をとって、左辺には教科書定理 11.3, 右辺には (1) を適用．)

- 5 5 つの 4 次の列ベクトル a, b, c, d, e の間には、
- $$|a, b, c, d| = 3, \quad |e, b, c, d| = 1, \quad |a, e, c, d| = 3, \quad |a, b, e, d| = 6, \quad |a, b, c, e| = -6,$$
- という、4 次の行列式を用いた関係式があるという．スカラー w, x, y, z, t の間には、 $wa + xb + yc + zd + te = 0$ という関係式があるとき、 w, x, y, z それぞれを t の式で表せ．

- 6 (1) $|P_5| = \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_2 \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 & \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 & \cos \theta_3 \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 & \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 & \cos \theta_3 \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \end{vmatrix}$
- の値を求めよ．より一般に、 $P_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}$ とし、 $n \geq 2$ なる自然数に対し、帰納的に、

$$P_{n+1} = \begin{bmatrix} P'_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_n \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \mathbf{p}_n \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{bmatrix}, \quad \text{ただし, } P_n = \begin{bmatrix} P'_n \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \quad (\mathbf{p}_n \text{ は } P_n \text{ の第 } n \text{ 行})$$

と定義するとき、 $|P_n|$ の値を求めよ．

- (2) x の 5 次式 $\begin{vmatrix} x & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & 1 \\ a_1 & x & b_{23} & b_{24} & b_{25} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & b_{34} & b_{35} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x & b_{45} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 1 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ．