数学演習第一 (第 11 回)　微積 : 積分の計算 (2)　解答例

2018 年 7 月 18 日 実施分

以下, 不定積分の計算においては, 積分定数は省略する.

1　(1)〜(4) は基本公式として，計算方法とともに結果も覚えておこう．被積分関数は似て非なるものです．

(1) $x = a\tan\theta\left(|\theta| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と置く．$\dfrac{1}{x^2+a^2} = \dfrac{\cos^2\theta}{a^2}$, $dx = \dfrac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta$ より，$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{\theta}{a} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{a}$.

(2) 被積分関数を部分分数分解して，$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$.

(3) $\sqrt{x^2+A} = t - x$ と置くと，両辺を 2 乗することで x^2 が消せて，$x = \dfrac{t^2-A}{2t}\left(= \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{A}{t}\right)\right)$ となる．$dx = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{A}{t^2}\right)dt = \dfrac{t^2+A}{2t^2}\,dt$ だから，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \int \frac{1}{t - \frac{t^2-A}{2t}}\frac{t^2+A}{2t^2}\,dt = \int\frac{dt}{t} = \log|t| = \log|x + \sqrt{x^2+A}|$.

(4) $x = a\sin\theta\left(|\theta| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と置く．$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{1}{a\cos\theta}$, $dx = a\cos\theta\,d\theta$ より，$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int d\theta = \theta = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}$.

(5)〜(8) では「見えない 1」とのペアで部分積分する方法が有効です．

(5) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}\,dx = \int 1\sqrt{x^2+A}\,dx = x\sqrt{x^2+A} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$. 最後の項で (分子の次数)$\geqq$(分母の次数) なので，次のように割り算する: $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+A}} = \dfrac{x^2+A-A}{\sqrt{x^2+A}} = \sqrt{x^2+A} - \dfrac{A}{\sqrt{x^2+A}}$. 代入して移項すると，$\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log|x+\sqrt{x^2+A}|\right)$. 最後は (3) から.

(6) (5) と同じ計算手順で，$\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}\right)$.

(7) $\displaystyle\int\mathrm{Sin}^{-1}x\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x - \int x\,(\mathrm{Sin}^{-1}x)'\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 右辺の被積分関数の分子 x が $(1-x^2)'$ の定数倍であることに注意する．$\displaystyle\int\mathrm{Sin}^{-1}x\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x + \frac{1}{2}\int\frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$.

(8) $\displaystyle\int\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx = x\,\mathrm{Tan}^{-1}x - \int\frac{x}{x^2+1}\,dx = x\,\mathrm{Tan}^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = x\,\mathrm{Tan}^{-1}x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$.

【補足】一般に, 不定積分 $\displaystyle\int f^{-1}(x)\,dx$ は $t = f^{-1}(x)$ ($\Leftrightarrow$ $x = f(t)$) で置換して，$\displaystyle\int f^{-1}(x)\,dx = \int tf'(t)\,dt = tf(t) - \int f(t)\,dt = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$ と計算できる. 但し, $F(t)$ は $f(t)$ の不定積分を表す.

2　(1) 部分分数分解によって，$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-5x+6} = \int\frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \log\left|\frac{x-3}{x-2}\right|$.

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-81} = \frac{1}{18}\int\left(\frac{1}{x^2-3^2} - \frac{1}{x^2+3^2}\right)dx = \frac{1}{108}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \frac{1}{54}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{3}$.

(3) 被積分関数が (分子の次数)$\geqq$(分母の次数) と頭でっかちなので，$\dfrac{x^2+3}{x^2+4} = \dfrac{x^2+4-1}{x^2+4} = 1 - \dfrac{54}{x^2+4}$ と割り算してから積分する．$\displaystyle\int\frac{x^2+8}{x^2+9}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{x^2+3^2}\right)dx = x - \frac{1}{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{3}$.

(4) やはり，$\dfrac{2x^4+4x^2+6x}{x^2+2} = \dfrac{2x^2(x^2+2)+6x}{x^2+2} = 2x^2 + 3\dfrac{(x^2+2)'}{x^2+2}$ と割り算する．(分子の次数)+1$=$(分母の次数) の場合，分母の導関数を分子に作るように変形する．$\displaystyle\int\frac{2x^4+4x^2+6x}{x^2+2}\,dx = \int\left(2x^2 + 3\frac{(x^2+2)'}{x^2+2}\right)dx = \frac{2}{3}x^3 + 3\log(x^2+2)$.

(5) 被積分関数の分母を $x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2-(2x)^2 = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ と因数分解すると，$\dfrac{x^2+2}{x^4+4} = \dfrac{x^2+2}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2+2x+2} + \dfrac{1}{x^2-2x+2}\right)$ と分解できる．$\displaystyle\int\frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{(x+1)^2+1^2} + \int\frac{dx}{(x-1)^2+1^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tan}^{-1}(x+1) + \mathrm{Tan}^{-1}(x-1)\right)$.

3　置換積分の問題です．積分変数を巧く置きかえることによって，$\boxed{2}$ のような有理関数の積分に帰着されます．

(1) $t=\sqrt{x}$ として置換積分する．$dx=2t\,dt$ だから，$\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\int\frac{t}{1+t}\,dt=2\int\frac{t+1-1}{t+1}\,dt=2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2(t-\log|t+1|)=2(\sqrt{x}-\log(\sqrt{x}+1))$.

(2) $t=\sqrt{1-x}$ と置くと，$x=1-t^2$ であって $dx=-2t\,dt$. よって，$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x}}=\int\frac{-2t}{(1-t^2)^2\,t}\,dt=-2\int\left\{\frac{1}{(t-1)(t+1)}\right\}^2dt=-2\int\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right\}^2dt=-\frac{1}{2}\int\left\{\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{2}{t^2-1}\right\}dt=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)=\frac{t}{t^2-1}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=-\frac{\sqrt{1-x}}{x}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|$.

(3) $\sqrt{x^2+3x-1}=t-x$ と置くと，両辺を 2 乗したときに x^2 の項が消えて，$x=\dfrac{t^2+1}{2t+3}$ と表せる．このとき，$dx=\dfrac{2(t^2+3t-1)}{(2t+3)^2}\,dt$ となるから，$\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-1}}=\int\frac{2t+3}{t^2+1}\frac{1}{t-\frac{t^2+1}{2t+3}}\frac{2(t^2+3t-1)}{(2t+3)^2}\,dt=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\,\mathrm{Tan}^{-1}\,t=2\,\mathrm{Tan}^{-1}(x+\sqrt{x^2+3x-1}\,)$. 【追記】$t=\frac{1}{x}$ の置換でもできる (置換の仕方で定数のズレが生じうる).

4 (1) $\displaystyle\int\cos^4x\,dx=\int\cos^2x\,(1-\sin^2x)\,dx=\int\cos^2x\,dx-\int(\sin x\cos x)^2\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx-\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)\,dx=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$.

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ の置換は基本です．このとき，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ は (計算で確認した後に) 覚えましょう．$\displaystyle\int\frac{dx}{2+\cos x}=\int\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt=2\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)$.

(3) 被積分関数が $\cos^2x$ と $\sin^2x$ の式の場合は，$t=\tan x$ の置換が有効です．このとき，$\cos^2x=\dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ と計算出来るから，$\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2x+4\sin^4x}=\int\frac{1}{\frac{1}{1+t^2}+\frac{4t^2}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{1+4t^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}(2t)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}(2\tan x)$.

5 (1) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{2^2-(x-1)^2}}=\left[\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{x-1}{2}\right]_1^2=\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{1}{2}-\mathrm{Sin}^{-1}\,0=\frac{\pi}{6}$.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{Sin}^{-1}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{Sin}^{-1}\,x\,(\mathrm{Sin}^{-1}\,x)'\,dx=\left[\frac{1}{2}\,(\mathrm{Sin}^{-1}\,x)^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{72}$.

(3) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ で，積分区間の対応は次のようになる：

x	$0\to\frac{\pi}{2}$
t	$0\to 1$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\sin x}=\int_0^1\frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int_0^1\frac{dt}{t^2+t+1}=\int_0^1\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Tan}^{-1}\,\sqrt{3}-\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

6 (1) $\displaystyle S=\int_0^1\mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx$ だから，$\boxed{1}$ (8) より，$\displaystyle S=\left[x\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$.

(2) 曲線 $y=\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ は $x=\mathrm{Sin}^{-1}\,y\ (0\leqq y\leqq 1)$ と表されるから，$\displaystyle V=\pi\int_0^1(\mathrm{Sin}^{-1}\,y)^2\,dy$. ここで，部分積分を用いて，$\displaystyle\int_0^1(\mathrm{Sin}^{-1}\,y)^2\,dy=\big[\,y\,(\mathrm{Sin}^{-1}\,y)^2\,\big]_0^1-\int_0^1y\cdot\frac{2\,\mathrm{Sin}^{-1}\,y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy=\frac{\pi^2}{4}+2\int_0^1(\sqrt{1-y^2}\,)'\,\mathrm{Sin}^{-1}\,y\,dy=\frac{\pi^2}{4}+2\left\{\Big[\sqrt{1-y^2}\ \mathrm{Sin}^{-1}\,y\Big]_0^1-\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,(\mathrm{Sin}^{-1}\,y)'\,dy\right\}=\frac{\pi^2}{4}-2\int_0^1dy=\frac{\pi^2}{4}-2$. よって，$V=\pi\left(\dfrac{\pi^2}{4}-2\right)$.

【補足】上の定積分は $x=\mathrm{Sin}^{-1}\,y$ ($\Leftrightarrow$ $y=\sin x$) で置換すれば $\displaystyle\int_0^1(\mathrm{Sin}^{-1}\,y)^2\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx$ と変形できる．

(3) $\displaystyle\ell=\int_0^{\log 2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^{\log 2}\sqrt{1+\sinh^2x}\,dx$ (微積教科書 p.76 も参照). 双曲線関数の公式 $\cosh^2x-\sinh^2x=1$ (各自確かめよ) を使うと，$\displaystyle\ell=\int_0^{\log 2}\cosh x\,dx=[\,\sinh x\,]_0^{\log 2}=\frac{1}{2}\,[\,e^x-e^{-x}\,]_0^{\log 2}=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.