

- 1 (1) $\tan \frac{5\pi}{9} = \tan\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$ かつ $-\frac{\pi}{2} < -\frac{4\pi}{9} < \frac{\pi}{2}$ より, $\text{Tan}^{-1}\left(\tan \frac{5\pi}{9}\right) = \boxed{-\frac{4\pi}{9}}$.
- (2) $\boxed{-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}}$ (問題の文脈では y の代わりに x を使ってはならない). $\boxed{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ と表してもよい.
- (3) $\alpha = \text{Tan}^{-1} \frac{3}{4}$ とおけば, $\tan \alpha = \frac{3}{4} \in (0, 1)$ であり, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. よって, $\text{Cos}^{-1} x = \frac{\pi}{4} - \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ となり, 確かに, これを満たす $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ が存在する. 従って,

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \alpha + \sin \alpha).$$

ここで,

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha = \cos \alpha \tan \alpha = \frac{4}{5} \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

であるから,

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right) = \boxed{\frac{7}{5\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{7\sqrt{2}}{10}}.$$

- 2 以下の (4)–(6) においては, 説明の便宜のため, ロピタルの定理を用いた箇所を $\star$ で表す. (下の《注》や【別法】で説明しているように, 実はここでの極限值はどれもロピタルの定理を持ち出さなくても計算できる.)

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{1 - 2^x} \stackrel{\star}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x \log 3}{-2^x \log 2} = \boxed{-\frac{\log 3}{\log 2}} = \boxed{-\log_2 3}.$$

《注》 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{1 - 2^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x}}{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}}$ と考えれば, 微分係数を計算していることに他ならない.

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \text{Tan}^{-1} 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \text{Tan}^{-1} 2x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\star}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{1+4x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{1+4x^2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

【別法】 $y = \frac{\pi}{2} - \text{Tan}^{-1} 2x$ とおけば, $x = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{1}{2 \tan y}$ であり, $x \rightarrow \infty$ のとき, $y \rightarrow +0$ となる. よって,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \text{Tan}^{-1} 2x \right) = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{y}{2 \tan y} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow +0} \frac{y}{\sin y} \cdot \cos y = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(6) 対数をとって考える.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log\left(\frac{2}{\pi} \text{Cos}^{-1} x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{2}{\pi} \text{Cos}^{-1} x\right)}{x} \stackrel{\star}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\text{Cos}^{-1} x} \cdot \frac{-1}{1+x^2}}{1} = -\frac{2}{\pi}.$$

よって,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \text{Cos}^{-1} x\right)^{\frac{1}{x}} = \boxed{e^{-\frac{2}{\pi}}}.$$

【別法】 $f(x) = \log(\text{Cos}^{-1} x)$ とおけば, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{2}{\pi} \text{Cos}^{-1} x\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0).$

3

- (7) 対数微分法による. $y = x^x$ ($x > 0$) とおけば, $\log y = x \log x$. この両辺を x で微分して,

$$\frac{y'}{y} = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$
 であるから, $y' = \boxed{x^x(\log x + 1)}$.

【別法】対数微分法を使わずに, $y = x^x = e^{x \log x}$ と変形すれば, 通常の合成関数の微分公式により,

$$y' = e^{x \log x} (x \log x)' = \boxed{x^x(\log x + 1)}$$
 と計算できる.

- (8) $y = \log \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = \frac{1}{2} \{ \log(1 - \sin x) - \log(1 + \sin x) \}$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) と変形して,

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) = \frac{1}{2} \frac{-2 \cos x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \boxed{-\frac{1}{\cos x}}.$$

- (9) $y = \text{Sin}^{-1} \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ($x > 0$) の導関数は

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2}} \cdot \frac{-1}{2(x+1)^{3/2}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{-1}{2(x+1)^{3/2}} = \boxed{-\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}}.$$

- (10) $y = \frac{1}{\cos x}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) より, $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} > 0$. よって, 逆関数 $x = f(y)$ が存在し,

$$f'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}.$$

一方, $y = 3$ となる $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ の値を α とすれば, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ より $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
 よって,

$$f'(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{9} \frac{3}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{6\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{12}}.$$

4

- (11) 平面 α の方程式は $4(x-2) + 3(y-2) + 12(z+1) = 0$. これを整理して, $\boxed{4x + 3y + 12z = 2}$
 あるいは $\boxed{4x + 3y + 12z - 2 = 0}$.

- (12) 点と平面との距離の公式を用いて, 求める距離は $\frac{|4(-3) + 3 \cdot 1 + 12 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = \boxed{\frac{1}{13}}$.

【別法】点 $A(-3, 1, 1)$ を通り, ベクトル $(4, 3, 12)$ に平行な直線上の点は $(-3+4t, 1+3t, 1+12t)$ と書ける. この直線と平面 α との交点 H においては, $4(-3+4t) + 3(1+3t) + 12(1+12t) = 2$,
 すなわち $t = -\frac{1}{169}$ となるので, H の座標は $(-\frac{511}{169}, \frac{166}{169}, \frac{157}{169})$. 点 H は点 A から平面 α に下ろした垂線の足に他ならないから, 求める距離は $|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{\left(-\frac{4}{169}\right)^2 + \left(-\frac{3}{169}\right)^2 + \left(-\frac{12}{169}\right)^2} = \boxed{\frac{1}{13}}$.

5

- (13) 行基本変形により $A \rightarrow \cdots \rightarrow D$ と簡約化されたとすれば, このときの変形に対応する基本行列の積が P である. よって, それと同じ行基本変形により, $[A \ E]$ (E は 2 次の単位行列) は $P[A \ E] = [PA \ P] = [D \ P]$ に変形される. ここで,

$$\begin{aligned} [A \ E] &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるから, $P = \boxed{\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}}$ は $PA = D$ を満たす. なお, $[D \ P]$ は $[A \ E]$ の (行基本変形に関する) 簡約行列であるから, 各行列に対する簡約行列の一意性から, P は一意に定まる.

$$(14) {}^tBC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -1 \\ 9 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$(15) {}^tBC = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -1 \\ 9 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 9 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -9 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } {}^tBC \text{ の階数は } \text{rank } {}^tBC = \boxed{2}.$$

【別法】まず, ${}^tB, C$ の階数がともに 2 であることは一目見て明らか. よって, 階数の性質により, $\text{rank } {}^tBC \leq \min\{\text{rank } {}^tB, \text{rank } C\} = 2$. また, (14) の結果より, 明らかに $\text{rank } {}^tBC \geq 2$. 従って, $\text{rank } {}^tBC = \boxed{2}$.

$$(16) C^tB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ より, } (C^tB)^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

6 (17) 拡大係数行列を行基本変形して,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & a-3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}.$$

よって, 求める条件は $\boxed{a=3}$.

(18) $a=3$ のとき, 上の計算により, 問題の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ に変形される (同値な連立 1 次方程式). このとき, $z=s$ (z は主成分に対応しない変数) とおくことにより, 求める解は

$$\begin{cases} x = 1+s \\ y = -s \\ z = s \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s \text{ は任意定数}).$$

(19) 係数行列を行基本変形して,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -8 & 3 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & -4 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(20) (19) の変形により, 問題の同次連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ と書きかえら

れる (同値な連立 1 次方程式). ここで, $x_3=s, x_5=t$ (x_3, x_5 は主成分に対応しない変数) とおいて, 求める解は

$$\begin{cases} x_1 = 3s - t \\ x_2 = -2s - 3t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \\ x_5 = t \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$