数学演習第一・期末統一試験【解説】 (2018 年 7 月 25 日実施)

1

(1) $f(x)=x^2e^{2x}$ より, $f'(x)=(2x^2+2x)e^{2x}$. $n\geqslant 2$ のときは, ライプニッツの公式を用いて,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}(e^{2x})^{(n-k)}\\
&=x^2(e^{2x})^{(n)}+n(x^2)'(e^{2x})^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}(x^2)''(e^{2x})^{(n-2)}\\
&=\{2^nx^2+2^{n-1}2nx+2^{n-2}n(n-1)\}e^{2x}\\
&=\boxed{2^{n-2}\{4x^2+4nx+n(n-1)\}e^{2x}}.
\end{aligned}$$

枠内の式は $n=0,1$ の場合にも正しいので, すべての非負整数 n に対して成り立つ.

(2) まず, $f(x)$ を部分分数分解する: $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+3}$ (a,b は定数). このとき, $a(x+3)+b(x-2)=2x+1$ が x に関する恒等式となるから, $a+b=2$, $3a-2b=1$. これを解いて, $a=b=1$ となり,

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}\right)^{(n)}=\boxed{(-1)^nn!\left\{\frac{1}{(x-2)^{n+1}}+\frac{1}{(x+3)^{n+1}}\right\}}.$$

2

(3) $\dfrac{1}{1+X}=1-X+o(X)$ $(X\to 0)$ に注意して,

$$\frac{x}{1-x^2}=x\{1+x^2+o(x^2)\}=x+x^3+o(x^3)\quad(x\to 0).$$

よって, $(a_0,a_1,a_2,a_3)=\boxed{(0,\,1,\,0,\,1)}$.

(4) $\sqrt{4+x}=2(1+\frac{x}{4})^{\frac{1}{2}}$ より,

$$\begin{aligned}
\sqrt{4+x}&=2\left\{1+\binom{\frac{1}{2}}{1}\frac{x}{4}+\binom{\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^3+o(x^3)\right\}\\
&=2\left\{1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}\frac{x}{4}+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}\frac{x^2}{16}+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}\frac{x^3}{64}+o(x^3)\right\}\\
&=2+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{64}+\frac{x^3}{512}+o(x^3)\quad(x\to 0).
\end{aligned}$$

よって, $(a_0,a_1,a_2,a_3)=\boxed{\left(2,\,\frac{1}{4},\,-\frac{1}{64},\,\frac{1}{512}\right)}$.

(5) まず, $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ $(x\to 0)$, $e^X=1+X+\dfrac{X^2}{2}+\dfrac{X^3}{6}+x(X^3)$ $(X\to 0)$ より,

$$\begin{aligned}
e^{\sin x}&=1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x+o(x^2)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+o(x)\right)^3+o(x^3)\\
&=1+\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\quad(x\to 0).
\end{aligned}$$

よって, $(a_0,a_1,a_2,a_3)=\boxed{\left(1,\,1,\,\frac{1}{2},\,0\right)}$.

3 (6) $x \to 0$ のとき, まず $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ より, 問題の極限値の分母は $(1-\cos x)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ であることに注意する. それに釣り合うように, 分子の方も $o(x^4)$ を用いて表す:

$$x(x-\sin x) = x\left\{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\right\} = \frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

よって,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x-\sin x)}{(1-\cos x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{4}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{1}{4} + o(1)} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

4 (7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \boxed{\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x+2}{2}}$ (積分定数は省略).

(8) $u = \sqrt{x+4}$ とおけば, $x = u^2 - 4$, $dx = 2u\,du$ であるから,

$$\int_5^{12} \frac{x+2}{x\sqrt{x+4}}\,dx = \int_3^4 \frac{u^2-2}{(u^2-4)u}\,2u\,du = \int_3^4 \frac{2u^2-4}{u^2-4}\,du = \int_3^4\left(2 + \frac{4}{u^2-4}\right)du$$
$$= \int_3^4\left(2 + \frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right)du = \left[\,2u + \log\frac{u-2}{u+2}\,\right]_3^4 = \boxed{2 + \log\frac{5}{3}}.$$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = \Big[-\log(1+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\log\frac{1}{2} = \boxed{\log 2}.$

(10)
$$\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1\left\{\frac{(1+x^2)\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x}{1+x^2} - \frac{\mathrm{Tan}^{-1}\,x}{1+x^2}\right\}dx$$
$$= \int_0^1\left(\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{2}\{(\mathrm{Tan}^{-1}\,x)^2\}'\right)dx$$
$$= \Big[\,x\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\,\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx - \left[\,\frac{1}{2}(\mathrm{Tan}^{-1}\,x)^2\,\right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{4} - \left[\,\frac{1}{2}\log(1+x^2)\,\right]_0^1 - \frac{\pi^2}{32} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}\log 2}$$

5 A が正方行列のとき, A と同じサイズの単位行列 E を並べた行列 $[A\ \ E]$ に行基本変形を繰り返して $[E\ \ B]$ の形まで変形できたなら, A は正則行列であり, B が A の逆行列を与える. 2 次正方行列については逆行列の公式を用いるのがよい.

(11) $$\begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{a^2+1}\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+1} & \frac{1}{a^2+1} \\ -\frac{1}{a^2+1} & \frac{a}{a^2+1} \end{bmatrix}}.$$

(12) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 15 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & 6 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -12 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

であるから, $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} -12 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -15 & 6 & -1 \end{bmatrix}}.$$

(13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ より, } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}.$$

6 (14) $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 11 \\ 1 & 11 & 12 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 11 \\ 0 & 10 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = -(90-110) = \boxed{20}.$

(15) 余因子展開を繰り返して,

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & -10 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\,5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & -8 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-5)\cdot(-1)^{3+2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = \boxed{70}.$$

(16) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} = -15$ であるから, $|\sqrt{3}\,C^{-1}B| = (\sqrt{3}\,)^4|C|^{-1}|B| = 9\cdot\dfrac{-1}{15}\cdot 70 = \boxed{-42}.$

7 (17) 行列式が 0 とならないような λ の条件を求めればよい.

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -5 & -7 \\ 0 & \lambda-2 & -3 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\{(\lambda-2)(\lambda-1)-6\}$$
$$= (\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda-4) = (\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1)$$

であるから, 求める条件は $\boxed{\lambda \neq -1,\ 3,\ 4}$.

8 (18) まず, $\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-11) = 11.$

よって, 求める四面体の体積 V は $V = \dfrac{1}{6}\cdot 11 = \boxed{\dfrac{11}{6}}.$

$\boxed{9}$ (19) 行列式と行基本変形との関係に注意して,

$$|B| = \frac{1}{2^4}\begin{vmatrix} 4\mathbf{a}+5\mathbf{b}+6\mathbf{c}+7\mathbf{d} \\ \mathbf{a} \\ 2\mathbf{a}+3\mathbf{b} \\ 3\mathbf{a}+4\mathbf{b}+5\mathbf{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 5\mathbf{b}+6\mathbf{c}+7\mathbf{d} \\ \mathbf{a} \\ 3\mathbf{b} \\ 4\mathbf{b}+5\mathbf{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 6\mathbf{c}+7\mathbf{d} \\ \mathbf{a} \\ 3\mathbf{b} \\ 5\mathbf{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 7\mathbf{d} \\ \mathbf{a} \\ 3\mathbf{b} \\ 5\mathbf{c} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{7\cdot 3\cdot 5}{16}\begin{vmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = \frac{105}{16}\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix} = \frac{105}{16}\cdot(-1) = \boxed{-\frac{105}{16}}.$$

【別法】$B = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4\mathbf{a}+5\mathbf{b}+6\mathbf{c}+7\mathbf{d} \\ \mathbf{a} \\ 2\mathbf{a}+3\mathbf{b} \\ 3\mathbf{a}+4\mathbf{b}+5\mathbf{c} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$ より,

$$|B| = \frac{1}{2^4}\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}|A| = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{16}\cdot 1 = \boxed{-\frac{105}{16}}.$$

第 2 の等号において, 行列式内の行の交換を 3 回繰り返して, 行の並ぶ順を入れ換えている.

(20) まず, A の (i, j) 余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 3)$ を計算する:

$$\widetilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3, \qquad \widetilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6, \qquad \widetilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\widetilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6, \qquad \widetilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12, \qquad \widetilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\widetilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3, \qquad \widetilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6, \qquad \widetilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

であるから, A の余因子行列は

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{31} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{32} \\ \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{33} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}}.$$