

数学演習第二 (演習第2回) 【解答例】

線形：直線・平面の方程式と外積 2018年 10月 10日 実施

1 (1) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}$. (外積の結合律は不成立!)

(2) $\mathbf{b} = t\mathbf{a} + \mathbf{b}_2$ と \mathbf{a} との内積をとり, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = t\|\mathbf{a}\|^2$. よって $t = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}$ となり, $\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$.

更に, $\|\mathbf{b}_1\| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|}$, $\|\mathbf{b}_2\| = \sqrt{\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{b}_1\|^2} = \frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}}{\|\mathbf{a}\|}$ ($\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}$ が直角三角形をなすことに注意). ここまでは \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) のベクトルで成立するが, $\|\mathbf{b}_2\|$ については, 空間ベクトルであれば外積を用いて $\|\mathbf{b}_2\| = \frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{a}\|}$, 平面ベクトルであれば行列式を用いて $\|\mathbf{b}_2\| = \frac{|\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b}]|}{\|\mathbf{a}\|}$ と表せる.

(3) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 - 3 - 6 = -7$, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{14}$. また, \mathbf{u}, \mathbf{v} のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) は,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{1}{2} \quad \text{より, } \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

更に, \mathbf{v} の \mathbf{u} 方向への正射影は $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} = \frac{-7}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

(4) $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ を第3列に関して余因子展開し, そのあと外積の定義を用いて,

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

この関係式を用いて, ① $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}] = 0$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{b}] = 0$ (同じ列を含む行列式の値は0). ② $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 \geq 0$. あとは \mathbf{a}, \mathbf{b} が1次独立のとき $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ を示す必要があるが, 図形的に考えれば $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = (\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積) なので, これは明らか.

(5) 転置行列の定義より, 一般に $\mathbf{P}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot {}^t\mathbf{P}\mathbf{b}$ が成り立つ. これを用いて, $\mathbf{Q}\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot {}^t\mathbf{Q}\mathbf{Q}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. 更に, $(\mathbf{Q}\mathbf{a} \times \mathbf{Q}\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det[\mathbf{Q}\mathbf{a} \ \mathbf{Q}\mathbf{b} \ \mathbf{Q}^t\mathbf{Q}\mathbf{c}] = (\det \mathbf{Q}) \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot {}^t\mathbf{Q}\mathbf{c} = \pm\mathbf{Q}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ ($\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$) であるから, $\mathbf{Q}\mathbf{a} \times \mathbf{Q}\mathbf{b} = \pm\mathbf{Q}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ が従う.

【注】直交変換 (直行列の掛け算) はベクトルの回転移動 (行列式 1) や鏡像変換 (行列式 -1) を表す. ここでの主張より, ① 内積やノルムは直交不変, すなわちベクトルを直交変換する前後で値が変わらない. ② ベクトルを直交変換してから外積をとったものと, 外積をとってから直交変換したものを比べると, 回転移動なら一致するが, 鏡像変換なら向きが逆転する.

2 (1) $\overrightarrow{AB} = {}^t(-2, 5)$, $\overrightarrow{AC} = {}^t(2, 4)$ より, $(\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} |\det[\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AC}]| = 9$.

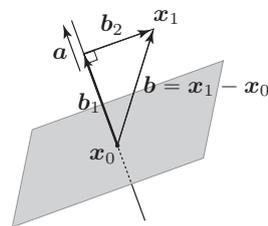
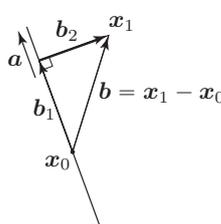
(2) $\overrightarrow{AB} = {}^t(2, -2, -4)$, $\overrightarrow{AC} = {}^t(-3, -1, 1)$, $\overrightarrow{AD} = {}^t(3, -3, 0)$ より, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = {}^t(-6, 10, -8)$ となり,

$$(\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \|{}^t(-6, 10, -8)\| = 5\sqrt{2},$$

$$(\text{四面体 } ABCD \text{ の体積}) = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |{}^t(-6, 10, -8) \cdot {}^t(3, -3, 0)| = 8.$$

3 (1) ① 点 \mathbf{x}_1 と ① の直線 ℓ との距離は ① (2) で $\mathbf{b} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ と考えたときの $\|\mathbf{b}_2\|$ に等しい (下左図). よって, 求める距離は $\frac{\|\mathbf{a} \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{a}\|}$. (“垂線の足” は $\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$ で与えられる.)

② 点 \mathbf{x}_1 と ② の平面 P との距離は ① (2) で $\mathbf{b} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ と考えたときの $\|\mathbf{b}_1\|$ に等しい (下右図). よって, 求める距離は $\frac{|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{a}\|}$. (“垂線の足” は $\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1 = \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$ で与えられる.) 平面が $ax + by + cz + d = 0$ と表されるなら $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_0 + d = 0$ であるから, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1 + d$ となり, 距離は $\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ と表される.



(2) ① $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ が直線 AB の方向ベクトルを与えるので、直線 AB の方程式は $x - 1 = \frac{y - 1}{-3} = \frac{z}{3}$.

② $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ が平面 ABC の法線ベクトルを与えるから、平面 ABC の方程式は

$$3(x - 1) + 5(y - 1) + 4z = 0. \quad \text{これを整理して、} \quad 3x + 5y + 4z = 8.$$

次に、(1)② を利用するために、 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (A の位置ベクトル)、 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (D の位置ベクトル)、 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

(平面 ABC の法線ベクトル) とおけば、点 D と平面 ABC の距離は $\frac{|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{20}{\sqrt{50}} = 2\sqrt{2}$.

③ ②と同じ意味で $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}$ を用いる. 直線 l は点 A を通り、 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから、その方

程式は $\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 1}{5} = \frac{z}{4}$. また、 $\mathbf{a} \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ より、(1)① を用いて、点 D

とこの直線の距離は $\frac{\|\mathbf{a} \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{4\sqrt{50}}{\sqrt{50}} = 4$.

【注】②, ③の距離は D から平面、直線に下ろした垂線の長さである. ②では D から平面 ABC に垂線 DE を下ろせば、 $E(-1 + 3t, 3 + 5t, 4 + 4t)$ が $3x + 5y + 4z = 8$ 上にあるから $t = -\frac{2}{5}$ となり、 $\|\overrightarrow{DE}\| = 2\sqrt{2}$. ③では D から “A を通る平面 ABC の法線” に垂線 DF を下ろせば、 $F(1 + 3u, 1 + 5u, 4u)$ が $\overrightarrow{DF} \perp \mathbf{a}$ を満たすから $u = \frac{2}{5}$ となり、 $\|\overrightarrow{DF}\| = 4$.

(3) 2 平面の法線ベクトルが $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ であるから、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ が交線の方向ベクトルとな

る. 一方、交線と xy 平面との交点は $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ z = 0 \end{cases}$ を解いて、 $(x, y, z) = (-2, 3, 0)$. よって、交線の方

程式は $\frac{x + 2}{-4} = \frac{y - 3}{7} = z$ ($\Leftrightarrow x = -2 - 4t, y = 3 + 7t, z = t$). あるいは、交線上の点は連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases} \quad \text{の解であると考えて、行基本変形} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

により、上と同じパラメータ表示を得る. 次に、2 平面のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) は 2 平面の法線同士のなす角に

等しいから、 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{0}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = 0$. よって、 $\theta = \frac{\pi}{2}$.

【注】2 直線の方向ベクトルが \mathbf{a}, \mathbf{b} であるとき、この 2 直線のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) は「 \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角」または「 $\mathbf{a}, -\mathbf{b}$ のなす角」のいずれかで与えられる. 従って、 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$ が成り立つ.

(4) ① 直線 l 上の点 $(4 + 5t, -1 + 3t, -2 - 4t)$ を平面 α の方程式 $5x - 4y - 3z = 5$ に代入して、

$$5(4 + 5t) - 4(-1 + 3t) - 3(-2 - 4t) = 5. \quad \therefore t = -1.$$

よって、交点 \mathbf{x}_0 の座標は $(-1, -4, 2)$.

② α の法線ベクトルが $\mathbf{a} := \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$, l の方向ベクトルが $\mathbf{b} := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ であるから、 \mathbf{b} の平面 α への正射影は

$$\mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{25}{50} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

よって、直線 m の方程式は $x + 1 = \frac{y + 4}{2} = \frac{z - 2}{-1}$.

③ $\mathbf{c} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ が直線 m の方向ベクトルであるから、直線 l, m のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすれば、

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|}{\|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\|} = \frac{|5 + 6 + 4|}{\sqrt{50}\sqrt{6}} = \frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6}.$$

④ 求める平面は \mathbf{x}_0 を通り、 $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとする. よって、方程式は

$$5(x + 1) + (y + 4) + 7(z - 2) = 0, \quad \text{すなわち} \quad 5x + y + 7z = 5.$$