数学演習第二 （演習第２回）

線形：直線・平面の方程式と外積

2018 年 10 月 10 日 実施

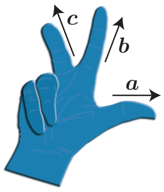
1 **[内積, 外積]** (線形 p.4, p.8)

- 空間ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$ に対して, **ノルム** (**大きさ**) $\|\boldsymbol{a}\|:=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$,

  内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}:=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\,(=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})$, **外積** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}:=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}\,(=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$

  が定義される (ノルム, 内積が $\mathbb{R}^n$ のベクトルに対しても同様に定義されることは周知の通り). $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq 0$ のとき, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ とすれば, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$ が成り立つ. また, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$ が 1 次独立のとき, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$ は次の性質により特徴付けられる (一意に定まる):
  ① $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の両方と直交, ② $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は右手系, ③ $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積$)$.

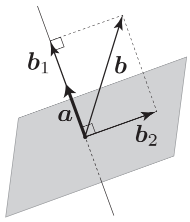
- $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ が**右手系** (をなす) とは, 右手の親指, 人差し指, 中指の 3 本だけを立てたとき, 3 本の指が指す方向をこの順に $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の方向に合わせることができることをいう. 特に, $\mathbb{R}^3$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ は右手系をなす. 行列式を用れば, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ が右手系とは, $\det\bigl[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\bigr]>0$ であることに他ならない. ここで, $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を 3 列に並べてできる行列 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ の行列式を表す.



---

(1) $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ に対して, $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$ を計算せよ.

(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ のとき, $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ $(\boldsymbol{b}_1=t\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{a}=0)$ の形に分解せよ. (このとき, $\boldsymbol{b}_1$ を $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ 方向の直線」への**正射影** (または $\boldsymbol{a}$ への正射影), $\boldsymbol{b}_2$ を $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルとする平面」への正射影と呼ぶ.) 更に, $\|\boldsymbol{b}_1\|$ と $\|\boldsymbol{b}_2\|$ を $\|\boldsymbol{a}\|,\|\boldsymbol{b}\|,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ を用いて表せ ($\boxed{2}$ の説明も見よ).



(3) (1) の $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ に対して, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$, $\|\boldsymbol{u}\|$, $\|\boldsymbol{v}\|$, “$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ のなす角”, “$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影” を求めよ.

(4) $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3)$ を第 3 列に関して余因子展開して $\boxed{\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}$ を示せ. 更に, この関係式を用いて, 次を示せ: ① $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$, ② $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が 1 次独立ならば $\det\bigl[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\bigr]>0$ (すなわち $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が右手系).

(5) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$, 3 次**直交行列** Q $(\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ {}^{\mathrm{t}}QQ=Q\,{}^{\mathrm{t}}Q=E)$ に対して, $Q\boldsymbol{a}\cdot Q\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ (従って $\|Q\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{a}\|$) 及び $Q\boldsymbol{a}\times Q\boldsymbol{b}=\pm Q(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ ($\pm$ は $\det Q\in\{\pm1\}$ の符号を表す) を示せ.

2 **[面積, 体積]** (線形 p.6, p.8, pp.85–86)

- $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^2$ (平面ベクトル) に対して,
  $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S=\bigl|\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}]\bigr|\ \bigl(=\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}\,\bigr)$.
- $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ (空間ベクトル) に対して,
  $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|\ \bigl(=\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}\,\bigr)$,
  $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 $V=\bigl|\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]\bigr|\ \bigl(=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|\,\bigr)$.

---

(1) $\mathrm{A}\,(1,-2)$, $\mathrm{B}\,(-1,3)$, $\mathrm{C}\,(3,2)$ のとき, $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ.

(2) $\mathrm{A}\,(-1,2,1),\mathrm{B}\,(1,0,-3),\mathrm{C}\,(-4,1,2),\mathrm{D}\,(2,-1,1)$ のとき, $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積, 四面体 ABCD の体積を求めよ. ($\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の作る平行四辺形, $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}},\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の作る平行六面体を考えよ.)

3 【空間内の直線と平面】 (線形 pp.10–13)

ここでは, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ とし, 点 (x_0, y_0, z_0) と位置ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ を同一視する.

ⓐ 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a} \neq 0$ を**方向ベクトル**とする直線 ℓ は (ℓ 上の任意の点を $\boldsymbol{x}$ として)

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}} \qquad \text{(直線 } \ell \text{ のベクトル方程式)}$$

と表される. これを成分表示し, パラメータ t を消去することにより,

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}} \qquad \text{(直線 } \ell \text{ の方程式)}$$

が得られる. (この表現は $abc \neq 0$ のときのみ意味を持つ. 例えば $a = 0$, $bc \neq 0$ なら, $x = x_0$, $\dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ となる.)

ⓑ 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (1 次独立) で '張られる' 平面 α は (α 上の任意の点を $\boldsymbol{x}$ として)

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{c}} \qquad \text{(平面 } \alpha \text{ のベクトル方程式)}$$

と表される. 平面 α の**法線ベクトル** $\boldsymbol{a}$ (例えば $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$) と上式との内積をとれば, パラメータ s, t が消去され, $\boxed{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0}$ が得られる (点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルとする平面). これを成分表示して,

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0} \qquad \text{(平面 } \alpha \text{ の方程式)}$$

を得る. (通常は $ax + by + cz + d = 0$ あるいは $ax + by + cz = d'$ の形に整理する.)

---

(1) $\boxed{1}$(2) を利用して次を示せ.

① 点 $\boldsymbol{x}_1$ とⓐの直線の距離 (垂線の長さ) は $\dfrac{\|\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ で与えられる.

② 点 $\boldsymbol{x}_1$ とⓑの平面 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ との距離 (垂線の長さ) は $\dfrac{|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ で与えられる. 平面が $ax + by + cz + d = 0$ の形なら $\boxed{\dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$ となる.

(2) $\mathrm{A}(1, 1, 0)$, $\mathrm{B}(2, -2, 3)$, $\mathrm{C}(3, -1, 1)$, $\mathrm{D}(-1, 3, 4)$ とする. ① 直線 AB (2 点 A, B を通る直線) の方程式を求めよ. ② 平面 ABC (3 点 A, B, C を通る平面) の方程式を求めよ. (まず法線ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ.) また, 点 D とこの平面の距離を求めよ. ③ 点 A を通る平面 ABC の**法線** (ℓ とする) の方程式を求めよ. また, 点 D と直線 ℓ の距離を求めよ.

【注】②, ③ の距離は, それぞれ点 D から平面 ABC, 直線 ℓ に下ろした垂線の長さに他ならない. この点に注目すれば (1) を利用しなくても計算できる (まず "垂線の足" の座標を求める).

(3) 2 平面 $\alpha\colon x + y - 3z = 1$, $\beta\colon 2x + y + z = -1$ に対して, ① 2 平面 α, β の交線の方程式を求めよ. (交線の方向ベクトルは 2 平面の法線ベクトルと直交することに注意. また, 交線が通る点としては例えば xy 平面との交点を考えるとよい. あるいは, 交線上の点を連立 1 次方程式の解の集合と考えてもよい.) ② 2 平面 α, β のなす角を求めよ.

(4) 直線 $\ell : \dfrac{x - 4}{5} = \dfrac{y + 1}{3} = \dfrac{z + 2}{-4}$ と平面 $\alpha : 5x - 4y - 3z = 5$ に対して, ① 直線 ℓ と平面 α の交点 $\boldsymbol{x}_0$ を求めよ. ② 直線 ℓ を平面 α 上に正射影して得られる直線 m ($\boldsymbol{x}_0$ を通り, "ℓ の方向ベクトルの平面 α への正射影" を方向ベクトルとする直線) の方程式を求めよ. ③ 2 直線 ℓ, m のなす角 (= 直線 ℓ と平面 α のなす角) を求めよ. ④ 2 直線 ℓ, m を含む平面の方程式を求めよ.