2018 数学演習第二 第 3 回「ベクトル空間・部分空間」解答例

$\boxed{1}$ **部分空間となっているのは，(2)(8)(10).**

(1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin W$ だから (i) は不成立．(2) $\mathbf{0} \in W$ より (i) は成立．$x+5y=0$ のとき $(kx)+5(ky)=0$ が成り立つから (iii) が成り立つ．さらに $x'+5y'=0$ のとき，$(x+x')+5(y+y')=(x+5y)+(x'+5y')=0$ なので (ii) も成り立つ．

(3) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$ だから (ii) は不成立．

(4) k が整数でない実数なら，$k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$ だから (iii) は不成立．

(5) $k<0$ なら $k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$ だから (iii) は不成立．

(6) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$ だから (ii) は不成立．

(7) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \notin W$ だから (ii) は不成立，

(8) (2) と同じようにしてチェックできるが，(6)(8) はいずれも同次形連立一次方程式の解空間なので部分空間（**教科書 命題 15.4**）．

(9) 非同次形連立一次方程式 $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x-4y+3z=1 \\ x-3y+3z=1 \end{cases}$ は $x=y=z=0$ を解に持たないので，$\mathbf{0} \notin W$．つまり (i) は不成立．

(10) まず $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x-4y+3z=0 \\ x-3y+3z=0 \end{cases}$ は解 $x=y=z=0$ を持つから，$\mathbf{0} \in W$．また，$\begin{cases} x+2y+3z=a \\ x-4y+3z=b \\ x-3y+3z=c \end{cases}$ が解 $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ を持つとき，$x=kx_0, y=ky_0, z=kz_0$ とすれば $\begin{cases} x+2y+3z=ka \\ x-4y+3z=kb \\ x-3y+3z=kc \end{cases}$ の解になる．つまり $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in W$ のとき，$\begin{bmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{bmatrix} \in W$ となるから，(iii) が成立．さらに，$\begin{cases} x+2y+3z=a' \\ x-4y+3z=b' \\ x-3y+3z=c' \end{cases}$ が解 $x=x_1, y=y_1, z=z_1$ を持つとき，$x=x_0+x_1, y=y_0+y_1, z=z_0+z_1$ とすれば $\begin{cases} x+2y+3z=a+a' \\ x-4y+3z=b+b' \\ x-3y+3z=c+c' \end{cases}$ の解になる．つまり，つまり $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \in W$ のとき，$\begin{bmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{bmatrix} \in W$ となるから，(ii) が成り立つ．

$\boxed{2}$ (1) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & 4 & -8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \notin W$．$\boldsymbol{w} \in W$．

(3) 改 $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 8 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 20 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 11 \\ 0 & 12 & -9 & -3 & 17 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 & 11/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{array}\right]$ より $\boldsymbol{v} \in W$．$\boldsymbol{w} \notin W$．

(4) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & -7 & -5 \\ -2 & 3 & -6 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & -4 & 2 & -14 \\ 0 & 7 & -12 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & -4 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -15 \\ 0 & -4 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

より $\boldsymbol{v} \in W$．

(5) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 27 & -7 \end{array}\right] \to$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \notin W$.

$\boxed{3}$ (1) W_1 は $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線，すなわち $y = 3x$．同様に W_2 は $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線 $y = -\dfrac{1}{2}x$．共通部分は $\{\boldsymbol{0}\}$．和集合はこの 2 つの直線全体である．$\boldsymbol{v}_1 \in W_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_2$ の和 $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \notin W_i \ (i = 1, 2)$ だから $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \notin W_1 \cup W_2$．つまり $W_1 \cup W_2$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない．平面上のベクトル $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ に対して，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ となる c_1, c_2 は，$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ の解なので，$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p+2q}{7} \\ \frac{-3p+q}{7} \end{bmatrix}$ となる．つまりどんなベクトル $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ も，$\dfrac{p+2q}{7}\boldsymbol{v}_1 + \dfrac{-3p+q}{7}\boldsymbol{v}_2$ と表せるので，和空間 $W_1 + W_2$ に属する．よって $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$ である．(図示はいずれも省略．)

(2) $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in W_2$ となるための条件は，$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & p \\ 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & -4 & p+q \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & p+q+4r \end{array}\right] \to$ より，$p + q + 4r = 0$ である．これは W_1 が平面 $x + y + 4z = 0$ であることを意味している．図形的に見ると，W_1 に属する元は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を用いて $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ と表される元全体なので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ と直交するベクトルすなわち外積ベクトル $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ と直交している．ここからも W_1 は平面 $x + y + 4z = 0$ とわかる．同様に $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & p \\ -3 & 4 & q \\ 0 & 1 & r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 3p+q-4r \end{array}\right]$ より，W_2 は平面 $3x + y - 4z = 0$ となる．これは $\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ に直交する平面である．$W_1 \cap W_2$ は，2 つの平面の共通部分なので，$x + y + 4z = 0$ と $3x + y - 4z = 0$ を連立させると，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -16 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ より，$W_1 \cap W_2$ に属する元は $k \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$ (k は実数) と表せる．これは方向ベクトル $\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$ の直線を表す．図形的には $W_1 \cap W_2$ に属する元は，$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4$ の両方と直交するので，外積ベクトル $(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \times (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4) = \begin{bmatrix} 8 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線になる．最後に，和空間は $\mathbb{R}^3$ に一致する．なぜなら，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -4 & 1 & 0 & p \\ 1 & 0 & -3 & 4 & q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 & q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & -2 & 8 & p+q+4r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 & \frac{-3p+q+12r}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -\frac{p+q+4r}{2} \end{array}\right]$ となるので，$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = -\dfrac{3p+q+12r}{2}\boldsymbol{a}_1 + r\boldsymbol{a}_2 - \dfrac{p+q+4r}{2}\boldsymbol{a}_3$ と表せることがわかる．よって $\mathbb{R}^3$ のどんな元も $W_1 + W_2$ に属する．和集合 $W_1 \cup W_2$ が部分空間ではないことは，例えば，平面 $x + y + 4z = 0$ 上のベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $3x + y - 4z = 0$ 上のベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ の和 $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ が，$x + y + 4z = 0$ 上にも $3x + y - 4z$ 上にもないことからわかる．