2018 数学演習第二 第 5 回「一次独立・一次従属，基底・次元」解答例

$\boxed{1}$ 与えられたベクトルを左から順に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ とする．(1) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 8 & -2 & -7 \\ 2 & -8 & 17 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 22 & -55 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = 2 < 3$ だから，一次従属で，非自明な一次関係式は $\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}_1 + \dfrac{5}{2}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$.（$3\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ も可.）(2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4] = 3 < 4$ だから，一次従属で，非自明な一次関係式は $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$. (3) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4] = 3 < 4$ だから，一次従属で，非自明な一次関係式は $-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_1 + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$.（$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ も可.）(4) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4] = 4$ だから，一次独立.

$\boxed{2}$ (1) (i) $c_1(-\boldsymbol{v}_1 + 8\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3) + c_2(3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 - 8\boldsymbol{v}_3) + c_3(-6\boldsymbol{v}_1 - 7\boldsymbol{v}_2 + 17\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{0}$ とすると，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ で整理すれば，$(-c_1 + 3c_2 - 6c_3)\boldsymbol{v}_1 + (8c_1 - 2c_2 - 7c_3)\boldsymbol{v}_2 + (2c_1 - 8c_2 + 17c_3)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次独立だから，$-c_1 + 3c_2 - 6c_3 = 8c_1 - 2c_2 - 7c_3 = 2c_1 - 8c_2 + 17c_3 = 0$. これは連立一次方程式 $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 8 & -2 & -7 \\ 2 & -8 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ である．$\boxed{1}$(1) でみたように係数行列の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ だから，この連立一次方程式には，たとえば，$c_1 = \dfrac{3}{2}, c_2 = \dfrac{5}{2}, c_3 = 1$ という非自明な解がある．よって与えられた 3 つのベクトルは一次従属である．非自明な一次関係式は $\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}_1 + \dfrac{5}{2}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$.（$3\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ も可.）(ii) 同様に考えると $c_1(-\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4) + c_2(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4) + c_3(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4) + c_4(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{0}$ は連立一次方程式 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ と同値．$\boxed{1}$(4) でみたように係数行列の階数は 4 なのでこの連立一次方程式は自明な解のみを持つ．よって与えられたベクトルは一次独立である．(2) 同様に考えると，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ は連立一次方程式 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ と同値．係数行列を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & -16 & k-8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & k+2 \end{bmatrix}$ となる．一次従属であるためには，これの階数が 3 より小さい，つまり $k = -2$. 非自明な一次関係式は $-\dfrac{1}{8}\boldsymbol{a}_1 - \dfrac{5}{8}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$.（$\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 - 8\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ も可.）

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}^n$ の基底は n 個の一次独立な n 項列ベクトルからなる．$(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ が $\mathbb{R}^n$ の基底になるかどうかは**教科書 命題 7.14** にあるように $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ が正則行列であるか（行列式が 0 でないか）調べるのが簡単である．これを使えば，$\mathcal{E}$ は個数が 3 より小さいので基底にならず，$\mathcal{G}$ も行列式が 0 なので基底にならない．$\mathcal{F}$ は行列式が 2，$\mathcal{H}$ も行列式が 4 になるので，いずれも $\mathbb{R}^3$ の基底となる．

$\boxed{4}$ W_1 に属する元は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ と表せるので，$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ は W_1 を生成す

る．一次独立であることもチェックできるので，W_1 の基底である．$\dim W_1 = 2$ となる．W_2 を定義する同次形連立一次方程式の係数行列を簡約化すると $\begin{bmatrix}1&2&3\\1&-4&3\\1&-3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-6&0\\0&-5&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$．よって W_2 の元は $\begin{bmatrix}-3k\\0\\k\end{bmatrix}$ と表せる．つまり $\left(\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ が W_2 を生成し,（零ベクトルではないので）一次独立．よって W_2 の基底となる．$\dim W_2 = 1$ である．また，W_3 を定義する非同次形連立一次方程式の拡大係数行列を行基本変形すると $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&a\\1&-4&3&b\\1&-3&3&c\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&a\\0&-6&0&b-a\\0&-5&0&c-a\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&a\\0&1&0&\frac{a-b}{6}\\0&0&0&\frac{a+5b-6c}{30}\end{array}\right]$ より，$W_3 = \left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\middle|\, a+5b-6c=0\right\}$ となり，その元は $\begin{bmatrix}a\\b\\\frac{a+5b}{6}\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\0\\\frac{1}{6}\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$ と表せる．よって $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\\frac{1}{6}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}\right)$ は W_3 を生成し，一次独立であることもチェックできるので，W_3 の基底である．$\dim W_3 = 2$ となる．基底は $\left(\begin{bmatrix}6\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\6\\5\end{bmatrix}\right)$ も可．

$\boxed{5}$ (1) $\begin{bmatrix}1&4&5&3\\-2&-1&4&1\\1&3&3&2\\4&2&-8&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&5&3\\0&7&14&7\\0&-1&-2&-1\\0&-14&-28&-12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&5&3\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-3&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は一次従属で，非自明な一次関係式 $3\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$ が成り立つことがわかる．(2) (1) から，$\mathcal{E}$ は基底にならない．他方，非自明な一次関係式を使うと，$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3+c_4\boldsymbol{a}_4=(c_1-3c_3)\boldsymbol{a}_1+(c_2+2c_3)\boldsymbol{a}_2+c_4\boldsymbol{a}_4$ と書き直せるので，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ は W を生成する．同様に考えると $\mathcal{G},\mathcal{H}$ はいずれも W を生成することがわかる．$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ のどの 2 つ $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j$ をとっても $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{a}_4$ は一次独立であることがチェックできるので，$\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}$ はいずれも W の基底である．(3) 基底の定義に従って次の 3 つのことをチェックする．(i) $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ が一次独立．(ii) $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ が W に属す．(iii) $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ が W を生成する．まず (i) は，$\begin{bmatrix}4&2&9\\-1&3&-4\\3&1&7\\3&-4&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&14&-7\\-1&3&-4\\0&10&-5\\0&5&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&4\\0&2&-1\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ より $\operatorname{rank}[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]=3$ だから成立．次に (ii) は，$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4|\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]=$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&3&4&2&9\\-2&-1&1&-1&3&-4\\1&3&2&3&1&7\\4&2&0&3&-4&10\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&3&4&2&9\\0&7&7&7&7&14\\0&-1&-1&-1&-1&-2\\0&-14&-12&-13&-12&-26\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&0&-2&1\\0&1&1&1&1&2\\0&0&2&1&2&2\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&-1&2\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{b}_1=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_4)$，$\boldsymbol{b}_2=-\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{b}_3=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_4$ とそれぞれ表せることからわかる．(iii) は逆に $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ が $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ の一次結合で表せることを示せばよい．これは $\left[\begin{array}{ccc|ccc}4&2&9&1&4&3\\-1&3&-4&-2&-1&1\\3&1&7&1&3&2\\3&-4&10&4&2&0\end{array}\right]\to$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&4&2&1&-1\\0&14&-7&-7&0&7\\0&10&-5&-5&0&5\\0&5&-2&-2&-1&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&4&2&1&-1\\0&2&-1&-1&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&4&2&-2&2\\0&1&0&0&-1&1\\0&0&-1&-1&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&6&-2\\0&1&0&0&-1&1\\0&0&1&1&-2&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{a}_1=-2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_2=6\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2-2\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_4=-2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3$ と表せることからわかる．

［**注意**］: (i) は $U=\langle\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\rangle$ が 3 次元で $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$ がその基底であることを意味する．(ii) は $U\subset W$，(iii) は $U\supset W$ を意味する．(2) で $\dim W=3$ であることがわかっているので，**教科書 命題 18.6** に注意すれば，(ii),(iii) のどちらか一方が言えれば，(i) と合わせて，$U=W$ であることが言え，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ が W の基底とわかる．