2018 年度 数学演習第二 第 7 回「座標，行列の零空間・列空間・行空間」解答例

$\boxed{1}$ (1) $\boldsymbol{b}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ より，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$．$\boldsymbol{b}_1 = 1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{b}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{b}_3$ より，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$．$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}$ は，非同次形連立一次方程式 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_1$ を解く．拡大係数行列 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 | \boldsymbol{b}_1]$ を簡約化するか，$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ を求めて左から両辺に掛ける．$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$．(2) $\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{a}_1 + q\boldsymbol{a}_2 + r\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} p+q \\ p+q+r \\ p+r \end{bmatrix}$ だから，非同次形連立一次方程式 $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+q \\ p+q+r \\ p+r \end{bmatrix}$ を解く．拡大係数行列 $\left[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \middle| \begin{matrix} p+q \\ p+q+r \\ p+r \end{matrix}\right]$ を簡約化するか，$[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3]^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ を求めて左から掛ける．$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} p+2q-2r \\ p+2q+2r \\ p-2q+2r \end{bmatrix}$．一方，$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{E}} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3][\boldsymbol{v}]_{\mathcal{E}} = \boldsymbol{v} = p\boldsymbol{a}_1 + q\boldsymbol{a}_2 + r\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} p+q \\ p+q+r \\ p+r \end{bmatrix}$．

$\boxed{2}$ $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2)$ となる c_1, c_2 をそれぞれ求めればよい．この 2 つの非同次形連立一次方程式を同時に扱う．$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 | \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} -3 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 10 & 20 & 10 \\ 0 & -8 & -16 & -8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ となるから，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in V$ であり，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$．

$\boxed{3}$ (1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ だから，$\dim W_1 = 2$．基底は $\left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$．

また W_2 も同様に，$\dim W_2 = 3$．基底は $\left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$．$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ より，$\dim W = \dim N(A) = 2$ であり，基底は $\left(\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$．同様に，$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ より，$\dim U = 2$．基底は $\left(\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$．

(2) $W_1 + W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ であり，$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots (*)$ から，$\dim(W_1 + W) = 3$ で基底は $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}_1)$．要項の次元公式から，$\dim(W_1 \cap W) = \dim W_1 + \dim W - \dim(W_1 + W) = 1$．他方，$(*)$ から $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式が成り立つことが読み取れるので，$W_1 \ni \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in W_2$ より，$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$．これが基底．

［**注意**］：W_1 の元 $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 \\ c_1 + c_2 \\ -c_1 - 2c_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{bmatrix} \in W$ となる条件を求めて $c_1 + c_2 = 0$ を得てもよい．

(3) $W_1+W_2=\langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\rangle$ であり，$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&1&1&1\\0&0&1&-1&-2\\0&0&1&1&2\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}\cdots(**)$

より，$\dim(W_1+W_2)=4$，つまり $W_1+W_2=\mathbb{R}^4$．基底は $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{a}_1)$ でもよいし，$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)$ としても可．他方，要項の次元公式から $\dim(W_1\cap W_2)=2+3-4=1$．$(**)$ から $-\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2-2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式が読み取れるので，$-2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=-\boldsymbol{e}_2\in W_1\cap W_2$．よって $W_1\cap W_2$ の基底は $(\boldsymbol{e}_2)$．

［**注意**］：W_1 の元 $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2\in W_2$ となるための c_1,c_2 の条件，$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1+2c_2\\c_1+c_2\\-c_1-2c_2\\c_1+2c_2\end{bmatrix}$ が解を持つことから，$c_1=-2c_2$ を得てもよい．

(4) $W\cap U=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\middle|\ \begin{array}{l}x_1+x_2-x_4=0\\x_1+2x_2+x_3=0\\x_1-x_2=0\\5x_1-x_3-4x_4=0\end{array}\right\}$ だから，$\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\1&2&1&0\\1&-1&0&0\\5&0&-1&-4\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac12\\0&1&0&-\frac12\\0&0&1&\frac32\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ より，$\dim(W\cap U)=1$．基底は $\left(\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}1\\1\\-3\\2\end{bmatrix}\right)$．要項の次元公式から $\dim(W+U)=2+2-1=3$．$\boldsymbol{w}$ 以外に W,U から一つずつ元をとって 3 つの一次独立な元を作る．例えば $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{w})$ が一次独立であることは簡単にわかるので，これが $W+U$ の基底．

［**注意**］：(2)(3) と同じようにやってもよい．$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]\to\cdot\to\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{15}{2}\\0&1&0&5\\0&0&1&\frac32\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ から，$\dim(W+U)=3$ と基底 $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u}_1)$．次元公式から $\dim(W\cap U)=1$ を得る．非自明な一次関係式 $\frac{15}{2}\boldsymbol{v}_1-5\boldsymbol{v}_2-\frac32\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{0}$ から $\frac32\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2\in W\cap U$ を得るので，これが基底を与える．

$\boxed{4}$ 行列 A の零空間，行空間，列空間の基底は A の簡約行列をもとに考える．零空間 $N(A)$ の次元は A の列数 $-\operatorname{rank}A$ であり，基底は，同次形連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の基本解を選べばよい．$\dim R(A)=\operatorname{rank}A$ であり，行基本変形で行空間は変わらないから，簡約行列の 1 行目から $\operatorname{rank}A$ 行目までを取ればよい．$\dim C(A)=\operatorname{rank}A$ であり，列空間の基底は簡約行列の主成分に対応する元の行列 A の列を取ればよい．

$M=\begin{bmatrix}2&1&-2&0&4\\3&2&-3&-1&4\\-1&0&1&1&2\\-1&2&1&0&3\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&1\\0&1&0&0&2\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$．$\dim N(M)=2$ であり，基底は $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\-3\\1\end{bmatrix}\right)$．

$\dim R(M)=3$ であり，

基底は $([1,0,-1,0,1],[0,1,0,0,2],[0,0,0,1,3])$．$\dim C(M)=3$ であり，基底は $\left(\begin{bmatrix}2\\3\\-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$．

${}^tM=\begin{bmatrix}2&3&-1&-1\\1&2&0&2\\-2&-3&1&1\\0&-1&1&0\\4&4&2&3\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&\frac52\\0&0&1&\frac52\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ より，$\dim N({}^tM)=1$ であり，基底は $\left(\begin{bmatrix}6\\-5\\-5\\2\end{bmatrix}\right)$．

$\dim R({}^tM)=3$ であり基底は，$([1,0,0,-3],[0,2,0,5],[0,0,2,5])$．$\dim C({}^tM)=3$ であり，

$\left(\begin{bmatrix}2\\1\\-2\\0\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\2\\-3\\-1\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\\2\end{bmatrix}\right)$．

［**注意**］：$C({}^tM)$,$R({}^tM)$ の基底は，それぞれ $R(M)$ の基底，$C(M)$ の基底を転置しても可．