

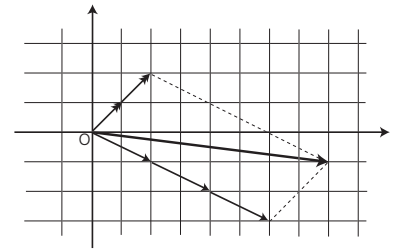
数学演習第二 第7回 「座標, 行列の零空間・列空間・行空間」

(2018.11.21 実施)

【要点】  $B = (b_1, \dots, b_r)$  がベクトル空間  $V$  の基底であるとき, 任意の  $v \in V$  は  $b_1, \dots, b_r$  の一次結合でただ一通りに表される.

$v = c_1 b_1 + \dots + c_r b_r = [b_1, \dots, b_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$  とするとき, 列ベクトル  $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$  を  $v$  の基底  $B$  に関する座標といい  $[v]_B$  と表す.  $V$  が数ベクトル空間 (の部分空間) の場合, 座標  $[v]_B$  を求めるには, 非同次形連立一次方程式  $[b_1, \dots, b_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = v$  を解けばよい.

例えば  $\mathbb{R}^2$  の基底  $B = (b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$  に対し,  $v = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$  の基底  $B$  に関する座標  $[v]_B$  は  $v = 3b_1 + 2b_2$  より  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  となる.



**1** [ $\mathbb{R}^3$  における座標]

$\mathbb{R}^3$  の自然な基底  $\mathcal{E} = (e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$  と, さらに次の2つの基底を考える.

$$A = (a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}), \quad B = (b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix})$$

(1)  $[b_1]_{\mathcal{E}}, [b_1]_A, [b_1]_B$  をそれぞれ求めよ.

(2)  $v \in \mathbb{R}^3$  の基底  $A$  に関する座標  $[v]_A$  が  $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$  のとき,  $v$  の基底  $\mathcal{E}$  に関する座標  $[v]_{\mathcal{E}}$  および基底  $B$  に関する座標  $[v]_B$  をそれぞれ求めよ.

**2** [部分空間における座標]

$\mathbb{R}^3$  の部分空間  $V = \left\langle a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$  を考えると,  $A = (a_1, a_2)$  は  $V$  の基底で

ある.  $b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$  はいずれも  $V$  に含まれることを示し, 基底  $A$  に関する座標  $[b_1]_A, [b_2]_A$  をそれぞれ求めよ.

---

【要点：共通部分と和空間に関する次元公式（教科書命題 19.10）】

$W_1, W_2$  を  $V$  の部分空間とすると、次が成り立つ。

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

---

**3** [共通部分と和空間]  $\mathbb{R}^4$  の部分空間  $W_1, W_2, W$  を以下の通りとする。

$$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}, \quad U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ 5x_1 - x_3 - 4x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

- (1)  $W_1, W_2, W, U$  の次元と基底をそれぞれ求めよ。
- (2)  $W_1 \cap W, W_1 + W$  の次元と基底をそれぞれ求めよ。
- (3)  $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$  の次元と基底をそれぞれ求めよ。
- (4)  $W \cap U, W + U$  の次元と基底をそれぞれ求めよ。

---

【要点：教科書 19 章】  $m \times n$  行列  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_n]$  に対し、

零空間  $N(A)$  同次連立方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  の解全体のなす  $\mathbb{R}^n$  の部分空間。

行空間  $R(A)$   $n$  項行ベクトル  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$  で生成される  $\mathbb{R}_n$  の部分空間。  
(ただし、 $\mathbb{R}_n$  は、 $n$  項行ベクトル全体のなすベクトル空間を表す。)

列空間  $C(A)$   $m$  項列ベクトル  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$  で生成される  $\mathbb{R}^m$  の部分空間。

---

**4** [行列の零空間・行空間・列空間] 行列  $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  とする。  $M$  および  $tM$  の

零空間、行空間、列空間の次元と基底をそれぞれ求めよ。