数学演習第二 （演習第８回）

微積：偏微分 [3] (陰関数・ラグランジュの未定乗数法)

2018 年 12 月 5 日 実施

$\boxed{1}$ **陰関数**の意味を確認しながら, 以下の空欄を埋めよ (微積教科書 pp.100–101 参照).

点 (a,b) の近傍で定義された C^1 級の 2 変数関数 $z=f(x,y)$ に対して, 点 (a,b) が "曲線" $f(x,y)=c$ 上にあるとする: $f(a,b)=c$ (教科書では $c=0$ の場合が扱われている).

(1) $f_y(a,b)\neq 0$ のとき, a を含む開区間 I_1, b を含む開区間 J_1 を適当に選べば,

$$f(x,y)=c \quad\Leftrightarrow\quad y=\varphi(x) \qquad (\text{in 長方形 } I_1\times J_1)$$

となる C^1 級関数 $y=\varphi(x)$ が定まる. このとき, $\varphi(a)=\boxed{}$, $f(x,\varphi(x))=c$ $(x\in I_1)$.

更に, 合成関数の微分法 (連鎖律) により, $\varphi'(x)=\boxed{}$ $(x\in I_1)$ が従う.

(2) $f_x(a,b)\neq 0$ のとき, a を含む開区間 I_2, b を含む開区間 J_2 を適当に選べば,

$$f(x,y)=c \quad\Leftrightarrow\quad x=\psi(y) \qquad (\text{in 長方形 } I_2\times J_2)$$

となる C^1 級関数 $x=\psi(y)$ が定まる. このとき, $\psi(b)=\boxed{}$, $f(\psi(y),y)=c$ $(y\in J_2)$.

更に, 合成関数の微分法 (連鎖律) により, $\psi'(y)=\boxed{}$ $(y\in J_2)$ が従う.

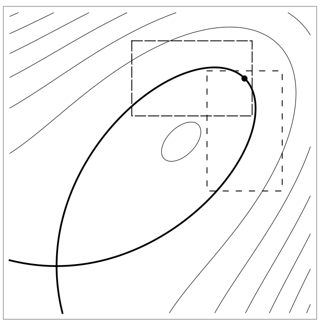
(3) $\nabla f=\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$ とおく. $\nabla f(a,b)\neq\mathbf{0}$ のとき, 曲線 $f(x,y)=c$ 上の点 (a,b) における接線は

$$\boxed{}(x-a)+\boxed{}(y-b)=0$$

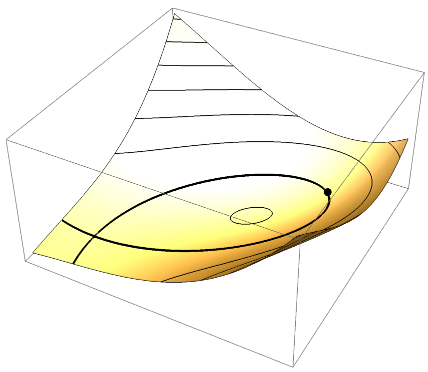
と表される. 従って, ベクトル $\nabla f(a,b)$ は点 (a,b) において, 曲線 $f(x,y)=c$ と $\boxed{}$ である. ($\nabla=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$ の読み方は**ナブラ**. ∇f $(=\mathrm{grad}\, f)$ は f の**勾配**と呼ばれる.)

【注】

- 上の $y=\varphi(x)$, $x=\psi(y)$ はともに「(点 (a,b) の近傍で) $f(x,y)=c$ が定める陰関数」と呼ばれる. $f(x,y)$ が C^r 級であればこれらも C^r 級となる.
- (1) の条件 $f_y(a,b)\neq 0$ は, "曲面" $z=f(x,y)$ が y 軸方向に傾斜していることを表す. それ故, "水平面" $z=c$ による切り口が $y=\varphi(x)$ の形の "きれいな" 曲線になると解釈できる. 更に, そのときの陰関数 $y=\varphi(x)$ は条件 $f_y(x,y)\neq 0$ が崩れるまで定義域が拡張される.



2 変数関数 $f(x,y)$ の "等高線"



$z=f(x,y)$ のグラフ

$\boxed{2}$ 2 変数関数 $f(x,y)$ と点の組

(1) $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} - \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ $(x>0)$,　点 $(1,0)$.　(問題 5.2.7 (4) 改)

(2) $f(x,y) = x^3+y^3-2xy$,　点 $(1,1)$.　($\boxed{1}$の図に示された関数)

に対して, 以下の問いに答えよ.

① $f(x,y)=0$ で定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ について, $f(x,y)=0$ の両辺を x で微分することにより,「x,y,y' の関係式」「x,y,y',y'' の関係式」「x,y,y',y'',y''' の関係式」を求めよ.

② 陰関数 $y=\varphi(x)$ の指定された点における Taylor(テーラー) 展開を 3 次の項まで求めよ.

③ 陰関数 $y=\varphi(x)$ の極値を求めよ.

$\boxed{3}$ 点 (a,b,c) の近傍で定義された C^1 級の 3 変数関数 $f(x,y,z)$ に対して, 点 (a,b,c) が "曲面" $f(x,y,z)=d$ 上にあり, $f_z(a,b,c)\neq 0$ が満たされると仮定する. このとき, (a,b) の近傍 $D\ (\subset\mathbb{R}^2)$ および c を含む開区間 J を適当に選べば,

$$f(x,y,z)=d \quad\Leftrightarrow\quad z=\varphi(x,y) \qquad \text{in } D\times J\subset\mathbb{R}^3$$

となる C^1 級の 2 変数関数 $z=\varphi(x,y)$ が存在する (3 変数関数に対する陰関数定理). このとき, $\varphi(a,b)=c,\ f(x,y,\varphi(x,y))=d\ ((x,y)\in D)$ であることに注意して以下の問いに答えよ.

(1) $\varphi_x(x,y),\ \varphi_y(x,y)$ を, $f_x(x,y,\varphi(x,y)),\ f_y(x,y,\varphi(x,y)),\ f_z(x,y,\varphi(x,y))$ を用いて表せ.

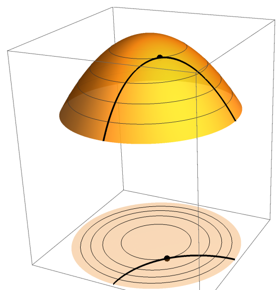
(2) 曲面 $f(x,y,z)=d$ 上の点 (a,b,c) における接平面および法線の方程式を求めよ. 但し, 法線に関しては $f_x(a,b,c), f_y(a,b,c), f_z(a,b,c)$ のすべてが 0 でない場合を考えよ.

$\boxed{4}$ 点 (a,b) の近傍で定義された C^1 級の 2 変数関数 $f(x,y),\ g(x,y)$ が

① 条件 $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとる,

② $g_y(a,b)\neq 0$

を満たすとき, 以下の問いに答えよ (Lagrange(ラグランジュ) **の未定乗数法** の確認).



(1) 点 (a,b) の近傍で $g(x,y)=0$ が陰関数 $y=\varphi(x)$ を定めることを確認し, $\varphi'(x)$ を $g(x,y)$ の偏導関数と $\varphi(x)$ を用いて表せ.

(2) (1) の $y=\varphi(x)$ を用いて, 1 変数関数 $h(x)=f(x,\varphi(x))$ を考える. このとき, 導関数 $h'(x)$ を $\varphi'(x)$ を含まない形で表せ. 更に, $f_x(a,b)g_y(a,b)-f_y(a,b)g_x(a,b)=0$ を示せ.

(3) 3 変数関数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ (λ を Lagrange 乗数と呼ぶ) を導入するとき,

$$F_x(a,b,\alpha)=F_y(a,b,\alpha)=F_\lambda(a,b,\alpha)=0$$

を満たす実数 α が存在することを示せ. (上の②を $g_x(a,b)\neq 0$ で置き換えても成立する.)

【注】$\nabla f(a,b)\neq\mathbf{0}$ のとき, $F_x(a,b,\alpha)=F_y(a,b,\alpha)=0$ は $\nabla f(a,b)\parallel\nabla g(a,b)$ (平行) を意味する. 従って, 2 曲線 $g(x,y)=0,\ f(x,y)=f(a,b)$ は点 (a,b) において共通の接線をもつ ($\boxed{1}$(3) 参照).

$\boxed{5}$ Lagrange の未定乗数法を用いて, 条件 $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(1) $g(x,y)=x^2+y^2-2,\ \ f(x,y)=(x+y)^3$.

(2) $g(x,y)=x^2+2xy+4y^2-1,\ \ f(x,y)=xy$.　(問題 5.2.13 (3) 改)

(3) $g(x,y)=x^2-y^2+1,\ \ f(x,y)=2x+y^3$.　(問題 5.2.13 (7))

[ヒント] Lagrange の未定乗数法から決まる極値点の候補を (a,b) とする. (1), (2) は $g(x,y)=0$ が閉曲線 ((1) は円, (2) は軸の傾いた楕円) であるから, $f(a,b)$ 達の値を閉曲線に沿って比べれば極大・極小が分かる. (3) については $\boxed{4}$ に現れる $h(x)$ に対し, $h''(a)$ の符号を調べて極大・極小を判定する.