数学演習第二 (第 9 回) 線形 : 線形写像, 核と像 解答例 2018 年 12 月 12 日 実施

$\boxed{1}$ (1) $f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ となるので, f は線形写像ではない.

(2) 任意の $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$, 任意の $k\in\mathbb{R}$ に対して,

$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\right)=f\left(\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}(x_1+y_1)+(x_2+y_2)\\(x_2+y_2)+(x_3+y_3)\\(x_3+y_3)+(x_1+y_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\\x_3+x_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1+y_2\\y_2+y_3\\y_3+y_1\end{bmatrix}=$$
$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)+f\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\right),\ f\left(k\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=f\left(\begin{bmatrix}kx_1\\kx_2\\kx_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}kx_1+kx_2\\kx_2+kx_3\\kx_3+kx_1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\\x_3+x_1\end{bmatrix}=kf\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)$$

が成り立つので, f は線形写像である.

(3) $f\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=1,\ f\left(\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right)=4\neq 2f\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ より, f は線形写像ではない.

(4) 任意の $p(t),q(t)\in\mathbb{R}[t]_3$, 任意の $k\in\mathbb{R}$ に対して, $f(p(t)+q(t))=p'(t)+q'(t)=f(p(t))+f(q(t)),\ \ f(kp(t))=kp'(t)=kf(p(t))$ が成り立つので, f は線形写像である.

$\boxed{2}$ (1) 一般のベクトル $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ の一次結合で表す. $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ を c_1, c_2 について解くと $\begin{bmatrix}3&2&x_1\\2&3&x_2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&(3x_1-2x_2)/5\\0&1&(-2x_1+3x_2)/5\end{bmatrix}$ より $c_1=\dfrac{3x_1-2x_2}{5}$, $c_2=\dfrac{-2x_1+3x_2}{5}$ を得るので,

$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=f\left(\frac{3x_1-2x_2}{5}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+\frac{-2x_1+3x_2}{5}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)=\frac{3x_1-2x_2}{5}f\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right)+\frac{-2x_1+3x_2}{5}f\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)$$
$$=\frac{3x_1-2x_2}{5}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\frac{-2x_1+3x_2}{5}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3x_1-2x_2\\-2x_1+3x_2\\3x_1-2x_2\end{bmatrix}$$

となる.

(2) 同様に $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ を解いて, $\begin{bmatrix}1&1&1&x_1\\0&1&1&x_2\\0&0&1&x_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&x_1-x_2\\0&1&0&x_2-x_3\\0&0&1&x_3\end{bmatrix}$ より $c_1=x_1-x_2$, $c_2=x_2-x_3$, $c_3=x_3$. したがって

$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=f\left((x_1-x_2)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+(x_2-x_3)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$=(x_1-x_2)f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)+(x_2-x_3)f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)+x_3f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$=(x_1-x_2)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+(x_2-x_3)\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_2+x_3\\x_1-x_3\\x_2\end{bmatrix}$$

となる.

$\boxed{3}$ (1) (a) $\mathrm{Ker}(f)$ は, $f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ であるようなベクトル $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 全体のなす $\mathbb{R}^3$ の部分空間, すなわち連立方程式 $\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ の解空間である. A の簡約行列は $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$ なので, その解は, 任意の値をとるパラメータ c を用いて $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ と表される. よって, $\mathrm{Ker}(f)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\rangle$ であるので, $\mathrm{Ker}(f)$

の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができて, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ である.

(b) $\mathrm{Im}(f)$ は, ベクトル $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 全体のなす $\mathbb{R}^2$ の部分空間である. x_1, x_2, x_3 は任意の値をとることから, $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となるため, $\mathrm{Im}(f)$ の基底は, この 3 つのベクトルの中から一次独立な最大個数の組を選べばよい. ここで, この 3 つのベクトルを列に並べた行列は A に他ならず, A の簡約行列の主成分は 1 列と 2 列にあるので, 3 つのベクトルから 1 番目と 2 番目を選んだ組, すなわち $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ を $\mathrm{Im}(f)$ の基底として選ぶことができる. よって, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ となる.

(c) 一般に, 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して, f が 1 対 1 写像 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, および f が上への写像 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^m$ $\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{Im}(f)) = m$ である. よって, f は上への写像だが 1 対 1 写像ではない.

(2) (a) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は, 任意の値をとるパラメータ c を用いて, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表される. よって, $\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ であるので, $\mathrm{Ker}(f)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができて, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ である.

(b) $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle$ であり, A の簡約行列の主成分が 1 列目と 2 列目にあることから, $\mathrm{Im}(f)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができる. よって, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ となる.

(c) f は 1 対 1 写像でも上への写像でもない.

(3) (a) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ なので, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のみ, すなわち, $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ で, 基底は無く, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ である.

(b) $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle$ であり, A の簡約行列の主成分がすべての列にあることから, $\mathrm{Im}(f)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができる. よって, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ となる.

(c) f は 1 対 1 写像かつ上への写像である.

$\boxed{4}$ (1) 任意の $p(t), q(t) \in \mathbb{R}[t]_3$, 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して, $D(p(t) + q(t)) = 2\{p'(t) + q'(t)\} - (1+t)\{p''(t) + q''(t)\} = 2p'(t) - (1+t)p''(t) + 2q'(t) - (1+t)q''(t) = D(p(t)) + D(q(t))$, $D(kp(t)) = 2kp'(t) - (1+t)kp''(t) = k\{2p'(t) - (1+t)p''(t)\} = kD(p(t))$ が成り立つので, D は線形写像である.

(2) $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ とおくと,

$$D(p(t)) = 2(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2) - (1+t)(2a_2 + 6a_3 t) = 2(a_1 - a_2) + 2(a_2 - 3a_3)t$$

となるので, $\mathrm{Ker}(D) \ni p(t)$ となるためには, $D(p(t)) = 0$ すなわち, $a_1 - a_2 = 0,\ a_2 - 3a_3 = 0$ を満たす必要がある. この連立方程式を解いて, $a_0 = c,\ a_1 = 3d,\ a_2 = 3d,\ a_3 = d$ (c, d は任意), すなわち $p(t) = c + d(3t + 3t^2 + t^3)$ を得る. よって, $\mathrm{Ker}(D) = \langle 1, 3t + 3t^2 + t^3 \rangle$. ここで, 1 と $3t + 3t^2 + t^3$ は一次独立なので, $\mathrm{Ker}(D)$ の基底として $(1, 3t + 3t^2 + t^3)$ を選ぶことができる. よって, $\dim(\mathrm{Ker}(D)) = 2$ である.

(3) $\mathbb{R}[t]_3$ の基底として $(1, t, t^2, t^3)$ を取ると,

$$D(1) = 0, \quad D(t) = 2, \quad D(t^2) = -2 + 2t, \quad D(t^3) = -6t$$

であることから, $\mathrm{Im}(D) = \langle 0, 2, -2 + 2t, -6t \rangle$. ここで, $-2 + 2t = (-1) \cdot 2 + (-\frac{1}{3}) \cdot (-6t)$ と表せて, 2 と $-6t$ は一次独立なので, $\mathrm{Im}(D)$ の基底として $(2, -6t)$ を選ぶことができる. よって, $\dim(\mathrm{Im}(D)) = 2$ である. 基底の取り方は, $(2, -2 + 2t)$, $(-2 + 2t, -6t)$, $(1, t)$ などでもよい.