

数学演習第二 (第9回)

線形：線形写像, 核と像

2018年12月12日

1 次の写像は線形写像になるか. 線形写像である場合にはそれを示し, 線形写像でない場合にはその理由を述べよ.

(1) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (演習書問題 12.1.1(4))

(2) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_1 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (演習書問題 12.1.1(5))

(3) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1^2 - x_2^2$ で定義される写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$

(4) $f(p(t)) = p'(t)$ で定義される写像 $f: \mathbb{R}[t]_3 \rightarrow \mathbb{R}[t]_2$ (下の注釈を参照)

2 次の間に答えよ. (演習書問題 12.1.2(2), (3))

(1) $f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を満たす線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を満たす線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ.

3 $m \times n$ 行列 A を次のように定めるとき, おおのの A が決める \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^m への線形写像 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ について以下の間に答えよ. (演習書問題 12.2.4)

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(a) $\text{Ker}(f)$ の基底および次元を求めよ. ($\{\mathbf{0}\}$ の場合, 基底は無し, 次元は 0 であることに注意せよ.)

(b) $\text{Im}(f)$ の基底および次元を求めよ.

(c) f は上への写像 (全射) であるか, また 1 対 1 写像 (単射) であるか.

4 写像 $D: \mathbb{R}[t]_3 \rightarrow \mathbb{R}[t]_2$ (下の注釈を参照) を $D(p(t)) = 2p'(t) - (1+t)p''(t)$ で定義するとき, 以下の間に答えよ.

(1) D が線形写像であることを示せ.

(2) $\text{Ker}(D)$ の基底および次元を求めよ.

(3) $\text{Im}(D)$ の基底および次元を求めよ.

$\mathbb{R}[t]_n = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n \mid a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ (n 次以下の実係数 1 変数多項式全体) は, 基底として $(1, t, t^2, \dots, t^n)$ が取れるような, $n+1$ 次元ベクトル空間である.