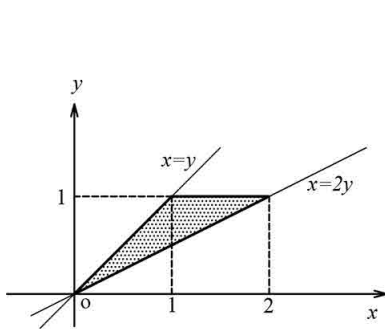
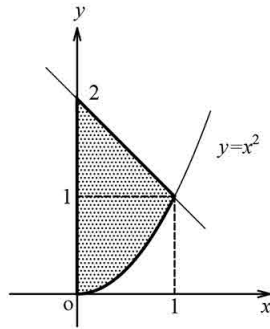


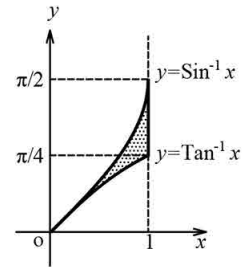
重要 重積分を計算する際は積分領域を正しく把握することが重要. 紙面の都合上, 一部の問題の積分領域しか載せないが, 重積分の問題を解くときには, まずは積分領域を描こう.



① (1)



② (1)



② (6)改

① (1) 積分領域 D は 3 直線 $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = 1$ で囲まれた三角形.

(i) $D : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2y$ とみなす.

$$\iint_D x^2 y \, dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{2y} x^2 y \, dx = \int_0^1 y \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=y}^{x=2y} dy = \int_0^1 \frac{7}{3} y^4 dy = \frac{7}{3} \left[\frac{1}{5} y^5 \right]_0^1 = \frac{7}{15}.$$

(ii) $y = 1$ を境に左右に分ける. $D_1 : 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{2}x \leq y \leq x$ と $D_2 : 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{2}x \leq y \leq 1$

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y \, dx dy &= \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x}^x x^2 y \, dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^1 x^2 y \, dy = \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=x} dx + \int_1^2 x^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{8} x^4 \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 \right) dx = \left[\frac{3}{40} x^5 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{40} x^5 \right]_1^2 = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

$$(2) \iint_D \sqrt{x^2 - y^2} \, dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2 - y^2} \, dy = \int_0^1 \frac{\pi x^2}{4} dx = \left[\frac{\pi x^3}{12} \right]_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

ここで, $\int_0^x \sqrt{x^2 - y^2} \, dy$ は, 半径 x の円の $1/4$ の面積を表すことから値が $\frac{\pi x^2}{4}$ となることを利用した.

(4) 積分領域 D は, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} - x$ と表せる.

$$\begin{aligned} \iint_D \cos(x+y) \, dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y) \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x+y)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}-x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin x \right) dx = [x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

(6) 積分領域 D は, 中心が $(1/2, 0)$, 半径 $1/2$ の円板であり, $0 \leq x \leq 1, -\sqrt{x-x^2} \leq y \leq \sqrt{x-x^2}$ と表せる.

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x} \, dx dy &= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x} \, dy = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x-x^2} \, dx = \int_0^1 2x\sqrt{1-x} \, dx \\ &= \int_1^0 2(1-t^2)t \cdot (-2t) dt = 4 \int_0^1 (t^2 - t^4) dt = \frac{8}{15}. \quad (t = \sqrt{1-x} \text{ で置換した}) \end{aligned}$$

【注】 (2), (6) は累次積分の順序を変えてもできるが, 計算量は増える (Web 頁で H24 の解答参照)

② (1) 積分領域は $D_1 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2-x$ である. このとき $0 \leq y \leq 2$ であり, $0 \leq y \leq 1$ のとき $0 \leq x \leq \sqrt{y}$, $1 \leq y \leq 2$ のとき $0 \leq x \leq 2-y$ となる. 従って,

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y) \, dy = \iint_{D_1} f(x,y) \, dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y) \, dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y) \, dx.$$

(6) 積分領域は $D_2 = \{(x,y) \mid \sin y \leq x \leq \tan y, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}\} \cup \{(x,y) \mid \sin y \leq x \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ であって, $D_2 = \{(x,y) \mid \tan^{-1} x \leq y \leq \sin^{-1} x, 0 \leq x \leq 1\}$ と表せる.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_{\sin y}^{\tan y} f(x, y) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{\sin y}^1 f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_{\tan^{-1} x}^{\sin^{-1} x} f(x, y) dy.$$

3 (1) x についての原始関数を計算することは困難であるが, y については容易に原始関数が求まる.

$$\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right) dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[-x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx = \frac{3}{8}.$$

積分順序を交換してこの重積分を計算することはかなり難しい.

(2) 積分領域は $0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1$ であるが, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$ とも表すことができる. 被積分関数は e^{-x^2} であり, x についての原始関数は初等関数では表せない. そこで累次積分の順序を入れ換えて

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 dx \int_0^x e^{-x^2} dy = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

実は, 順序交換しなくても, 部分積分を用いて,

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx = \left[y \int_y^1 e^{-x^2} dx\right]_0^1 + \int_0^1 y e^{-y^2} dy = \left[-\frac{1}{2} e^{-y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

4 (1)

| 切断面 | t の範囲 | 断面図の式 | 断面積 |
|------------|--------------------|---|--|
| 平面 $x = t$ | $0 \leq t \leq 1$ | $ y \leq \sqrt{1-t^2}, 0 \leq z \leq y^2$ | $\frac{2}{3} (\sqrt{1-t^2})^3$ |
| 平面 $y = t$ | $-1 \leq t \leq 1$ | $0 \leq x \leq \sqrt{1-t^2}, 0 \leq z \leq t^2$ | $t^2 \sqrt{1-t^2}$ |
| 平面 $z = t$ | $0 \leq t \leq 1$ | $x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, \sqrt{t} \leq y$ | $\text{Cos}^{-1} \sqrt{t} - \sqrt{t(1-t)}$ |

$$V_1 = \int_0^1 \frac{2}{3} (\sqrt{1-t^2})^3 dt = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \cdot \cos \theta d\theta = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \pi}{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{\pi}{8}.$$

$$V_1 = \int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

(2)

| 切断面 | t の範囲 | 断面図の式 | 断面積 |
|------------|--------------------|--|---|
| 平面 $x = t$ | $-1 \leq t \leq 1$ | $ y \leq \sqrt{1-t^2}, y^2 + z^2 \leq 1$ | $2 \text{Cos}^{-1} t + 2 t \sqrt{1-t^2}$ |
| 平面 $y = t$ | $-1 \leq t \leq 1$ | $ x \leq \sqrt{1-t^2}, x^2 + z^2 \leq 1$ | $2 \text{Cos}^{-1} t + 2 t \sqrt{1-t^2}$ |
| 平面 $z = t$ | $-1 \leq t \leq 1$ | $ x \leq \sqrt{1-t^2}, y \leq \sqrt{1-t^2}$ | $4(1-t^2)$ |

$$V_2 = \int_{-1}^1 4(1-t^2) dt = 4 \cdot 2 \int_0^1 (1-t^2) dt = 8 \left[t - \frac{1}{3} t^3\right]_0^1 = \frac{16}{3}.$$