数学演習第二 第 11 回 線形写像の表現行列・表現行列と座標 解答例

$\boxed{1}$ (1) $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]P$ となる $P = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]^{-1}[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = -\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.
(2)(i) $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]P$ となる P を求めるには，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2)$ なる c_1, c_2 を求めればよい．言い換えると，$P = [[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}, [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}}]$ である．$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2|\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \to$
$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ より，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ とわかるから，
$P = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
(ii) 座標の間の関係は，$P[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}}$ であることに注意すれば，$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3a + 2b \\ -a + b \end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$ (1) (i) $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.
(ii) $[f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3)] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]P_2$ となる P_2 は，$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.
(iii) $[f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]P_3$ となる P_3 は，
$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -11 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.
(iv) $[f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3)] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]P_4$ となる P_4 は，
$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.
(2) (i) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する g の表現行列 M は，$[g(\boldsymbol{a}_1), g(\boldsymbol{a}_2), g(\boldsymbol{a}_3)] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]M$ を満たす．言い換えると，$M = [[g(\boldsymbol{a}_1)]_{\mathcal{B}}, [g(\boldsymbol{a}_2)]_{\mathcal{B}}, [g(\boldsymbol{a}_3)]_{\mathcal{B}}]$ である．よって，$[g(\boldsymbol{a}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$．$[g(\boldsymbol{a}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$．$[g(\boldsymbol{a}_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
(ii) $\mathcal{E}_3$ から $\mathcal{A}$ への基底変換行列が $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ であり，$\mathcal{E}_2$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列が $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ であることから，求める $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2$ に関する表現行列は，$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$
$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 9 & -6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & -7 & 1 \end{bmatrix}$.
(3) (i) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する h の表現行列 X は，$[h(\boldsymbol{a}_1), h(\boldsymbol{a}_2), h(\boldsymbol{a}_3)] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]X$ を満たすから，
$X = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]^{-1}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 & 5 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$.

(ii) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{F}$ への基底変換行列は，$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

(iii) $\mathcal{G}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列は $\boxed{1}$(1) の $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$．よって $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ に関する h の表現行列は，

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & 8 & 5 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & -4 & 3 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -\frac{5}{3} \\ -1 & -1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

$\boxed{3}$ (1) $\mathcal{E}$ から $\mathcal{A}$ への基底変換行列を P とすると，$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$．よって，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{E}$ への基底変換行列は $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 6 & -5 \\ -2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

(2) (i) 求める表現行列は，$P^{-1}\begin{bmatrix} -9 & 8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 15 & -12 & 10 \end{bmatrix}P = \begin{bmatrix} -8 & 6 & -5 \\ -2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(ii) (i) の結果を見るのが早い．$\dim \operatorname{Ker} f = 1$ である．核に属する非自明な元の一例は $\mathcal{A}$ に関する座標でみて $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ だから，$-(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_3) - (-2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3) + (\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 - 4\boldsymbol{a}_3) = 2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_3$．よって $(2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_3)$ が基底の一例となる．$\dim \operatorname{Im} f = 2$ で，その基底の一例は，$\mathcal{A}$ に関する座標でみて $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ だから，$(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_3, -2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3)$.

$\boxed{4}$ (1) $L(1) = 2, L(x) = x - 1, L(x^2) = -2x$ より，表現行列は $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) A を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．$\dim N(A) = 1$ で基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ が取れ，$\dim C(A) = 2$ で基底として，$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ が取れる．これを $\mathbb{R}[x]_2$ の元に直せば，$\dim \operatorname{Ker} L = 1$ で基底として $(1 + 2x + x^2)$ が取れ，$\dim \operatorname{Im} L = 2$ で基底として $(2, x - 1)$ が取れる.（あるいはもっと簡単に $(1, x)$ ととっても良い.）

(3) $L(1 + x) = 1 + x, L(x + x^2) = -(1 + x), L(x^2) = -2(x + x^2) + 2x^2$ より，$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ を用いて，$P^{-1}AP$ と求めてもよい.