数学演習第二 第 11 回 (2019.1.9 実施)

線形写像の表現行列・基底変換行列・表現行列と座標

1

(1) 次で与えられる $\mathbb{R}^2$ の 2 つの基底 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ について，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列を求めよ．

$$\mathcal{A}=\left(\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right),\qquad \mathcal{B}=\left(\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)$$

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0\right\}$ の 2 つの基底を考える．

$$\mathcal{A}=\left(\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right),\qquad \mathcal{B}=\left(\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)$$

(i) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列を求めよ．

(ii) $\boldsymbol{x}\in W$ の $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ が $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ のとき，$\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}}$ を a,b で表せ．

2

$\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A}$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{B}$ を考える．

$$\mathcal{A}=\left(\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right),\quad \mathcal{B}=\left(\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)$$

また，$\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\mathcal{E}_3$，$\mathbb{R}^2$ の標準基底を $\mathcal{E}_2$ とおく．

(1) 線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を，$f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ で定義する．次の 4 つの場合について，与えられた $\mathbb{R}^3$ と $\mathbb{R}^2$ の基底に関する f の表現行列を求めよ．

(i) $(\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2)$　　(ii) $(\mathcal{A},\mathcal{E}_2)$　　(iii) $(\mathcal{E}_3,\mathcal{B})$　　(iv) $(\mathcal{A},\mathcal{B})$

(2) 線形写像 $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ の基底 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ に関する表現行列が $\begin{bmatrix}3&0&1\\2&-2&1\end{bmatrix}$ であるとする．

(i) 座標 $[g(\boldsymbol{a}_1)]_{\mathcal{B}},[g(\boldsymbol{a}_2)]_{\mathcal{B}},[g(\boldsymbol{a}_3)]_{\mathcal{B}}$ をそれぞれ求めよ．

(ii) $(\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2)$ に関する g の表現行列を求めよ．

(3) 次で定義される線形写像 $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を考える．

$$h(\boldsymbol{a}_1)=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix},\quad h(\boldsymbol{a}_2)=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix},\quad h(\boldsymbol{a}_3)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

(i) h の $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ に関する表現行列を求めよ．

次に，$\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2$ の別の基底 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ を取る．

$$\mathcal{F}=\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right),\quad \mathcal{G}=\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)$$

(ii) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{F}$ への基底変換行列を求めよ．

(iii) $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ に関する h の表現行列を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\mathcal{E} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ を基底とする 3 次元ベクトル空間 V を考え，V の基底 $\mathcal{A}$ を次のように定義する．

$$\mathcal{A} = (\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{v}_2 = -2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 - 4\boldsymbol{a}_3)$$

(1) $\mathcal{E}$ から $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ から $\mathcal{E}$ への基底変換行列をそれぞれ求めよ．

(2) 線形写像 $f : V \to V$ の $\mathcal{E}$ に関する表現行列が，$\begin{bmatrix} -9 & 8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 15 & -12 & 10 \end{bmatrix}$ であるとする．

(i) $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列を求めよ．

(ii) $\operatorname{Ker} f$，$\operatorname{Im} f$ の次元を求め，基底の一例を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を用いて与えよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2 次以下の実数係数 1 変数多項式全体のなすベクトル空間を $\mathbb{R}[x]_2$ とかく．線形変換 $L : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ を次で定義する．

$$L(p(x)) = 2p(x) - (x+1)p'(x) \quad (p(x) \in \mathbb{R}[x]_2)$$

(1) $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\mathcal{A} = (1, x, x^2)$ に関する L の表現行列 A を求めよ．

(2) A を用いて $\operatorname{Ker} L$，$\operatorname{Im} L$ の基底をそれぞれ一組求めよ．

(3) $\mathbb{R}[x]_2$ の別の基底 $\mathcal{B} = (1+x, x+x^2, x^2)$ に関する L の表現行列を求めよ．

要点（教科書『線形代数学講義』p.155, 定義 23.9, 命題 23.12）

V, W がベクトル空間で，$f : V \to W$ が線形写像であるとする．

V の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n), \mathcal{A}' = (\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n)$ と W の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m), \mathcal{B}' = (\boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_m)$ を考える．**$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する f の表現行列**とは，

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)A$$

を満たす $m \times n$ 行列 A のことをいう．**$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}'$ への基底変換行列**とは，

$$(\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)P$$

を満たす $n \times n$ 行列 P のことをいう．$\mathcal{A}'$ から $\mathcal{A}$ への基底変換行列は P^{-1} である．さらに，$\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ への基底変換行列を Q とするとき，$\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ に関する f の表現行列は，上の記号を用いて，$Q^{-1}AP$ と表される．