

平成 30 年度 数学演習第二 演習第 12 回 微積：重積分 [2] (重積分の変数変換) 解答例

2019 年 1 月 16 日 実施分

1 (1)  $u = x + 2y, v = x - y$  とおくと,  $x = \frac{u+2v}{3}, y = \frac{u-v}{3}$  だから, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

となる. このとき, 積分領域  $D$  は  $E = \{(u, v) \mid |u| \leq 1, |v| \leq 1\}$  に移る. よって,

$$I_1 = \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-v^2}{1-u^2}} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dv = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \int_0^1 \sqrt{1-v^2} dv = \frac{\pi^2}{6}$$

(2)  $u = 2x+3y, v = 3x+2y$  とおくと,  $x = -\frac{2u-3v}{5}, y = \frac{3u-2v}{5}$  より  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2/5 & 3/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}$  で,

積分領域  $D$  は  $E = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq \pi/3, 0 \leq v \leq \pi/6\}$  に移る. よって

$$I_2 = \int_0^{\pi/3} du \int_0^{\pi/6} \sin u \cos v \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dv = \frac{1}{5} \int_0^{\pi/3} \sin u \int_0^{\pi/6} \cos v = \frac{1}{20}$$

(3)  $u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, v = -\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$  とおくと,  $x = \frac{a(u-v)}{2}, y = \frac{b(u+v)}{2}$  より,  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a/2 & -a/2 \\ b/2 & b/2 \end{vmatrix} = \frac{ab}{2}$  で, 積分領域  $D$  は  $E = \{(u, v) \mid -u \leq v \leq u, 0 \leq u \leq 1\}$  に移る. よって, この変換によって

$$I_3 = \frac{\sqrt{ab}}{2} \int_0^1 du \int_{-u}^u \sqrt{(u-v)(u+v)} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dv = \frac{(ab)^{3/2}}{2} \int_0^1 du \int_0^u \sqrt{u^2 - v^2} dv$$

となる. ここで, 下線部が「半径  $u$  の四分円の面積」であることに注意すると,

$$I_3 = \frac{(ab)^{3/2}}{2} \int_0^1 \frac{\pi u^2}{4} du = \frac{(ab)^{3/2}}{2} \frac{\pi}{4 \cdot 3} = \frac{(ab)^{3/2}}{24} \pi$$

が得られる. あるいは, 微積分の教科書 p.60 の公式を復習して, 次のようにも計算できる.

$$I_3 = \frac{(ab)^{3/2}}{4} \int_0^1 \left[ v\sqrt{u^2 - v^2} + u^2 \text{Sin}^{-1} \left( \frac{v}{u} \right) \right]_{v=0}^{v=u} du = \frac{(ab)^{3/2}}{4} \text{Sin}^{-1}(1) \int_0^1 u^2 du = \frac{(ab)^{3/2}}{24} \pi$$

(4)  $u = \sqrt{\frac{x}{a}}, v = \sqrt{\frac{y}{b}}$  とおくと,  $x = au^2, y = bv^2$  より,  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2au & 0 \\ 0 & 2bv \end{vmatrix} = 4abuv$  で, 積分領域  $D$  は  $E = \{(u, v) \mid 0 \leq v \leq 1-u, 0 \leq u \leq 1\}$  に移る. よって

$$I_4 = \int_0^1 du \int_0^{1-u} (au^2)(bv^2) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dv = 4a^2b^2 \int_0^1 du \int_0^{1-u} u^3v^3 dv = a^2b^2 \int_0^1 u^3(1-u)^4 du = \frac{a^2b^2}{280}$$

2 (1) 極座標変換  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  のヤコビアンは  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$  である. この変換によって, 積分領域  $D$  は長方形  $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  に移る. よって,

$$J_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (r \cos \theta + r \sin \theta)^2 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr = \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} 1 + 2 \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\pi}{2} a^4$$

(2) 積分領域  $D$  が楕円の内部であることを注意して,  $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$  と極座標変換を少し工夫しよう.

ヤコビアンは  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr$  で,  $D$  は  $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  に移る.

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (ar \cos \theta + br \sin \theta)^2 abr d\theta = ab \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \theta + 2ab \cos \theta \sin \theta + b^2 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{ab}{8} \int_0^{2\pi} \{(a^2 - b^2) \cos 2\theta + 2ab \sin 2\theta + a^2 + b^2\} d\theta = \frac{ab(a^2 + b^2)\pi}{4} \end{aligned}$$

(3) 極座標変換  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  を施すと,  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$  で, 積分領域  $D$  は  $E = \left\{ (r, \theta) \mid a \leq r \leq b, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$  に移る. したがって,

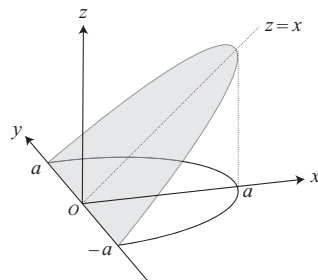
$$J_3 = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_a^b r^3 e^{r^2} dr = \frac{\pi}{2} \int_a^b r^3 e^{r^2} dr = \frac{\pi}{4} \int_{a^2}^{b^2} t e^t dt = \frac{\pi}{4} \left\{ e^{b^2} (b^2 - 1) - e^{a^2} (a^2 - 1) \right\}$$

(4) ここでは, 極座標変換  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  によって解く.  $(r, \theta)$  の動く領域は  $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 6 \cos \theta, \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2\}$  となる (微積の教科書 p.120 も参照).  $r, \theta$  の順に積分して,

$$J_4 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{6 \cos \theta} r \cos \theta r \sin \theta r dr = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{6 \cos \theta} r^3 \cos \theta \sin \theta dr = \frac{6^4}{4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^5 \theta \sin \theta d\theta = \frac{6^4}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t^5 = \frac{27}{4}$$

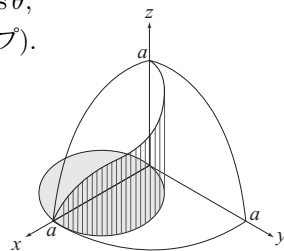
3 (1) 題意の部分  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq x\}$  の  $xy$  平面への射影は半円  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0\}$  で, 求める体積は  $V_1 = \iint_D x dx dy$  で与えられる. 極座標変換  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  で,  $D$  は  $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$  に対応するので,

$$V_1 = \iint_E (r \cos \theta) r dr d\theta = 2 \left( \int_0^a r^2 dr \right) \left( \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \right) = \frac{2}{3} a^3$$



(2) 題意の部分  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq ax, -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\}$  は  $xy$  平面 ( $z = 0$ ) や  $xz$  平面 ( $y = 0$ ) に関して対称だから,  $x, y, z \geq 0$  の部分の体積を 4 倍すればよい.  $D = \{(x, y) \mid (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq (\frac{a}{2})^2, y \geq 0\}$  (半円) として, 求める体積は  $V_2 = 4 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$  となる. 極座標変換  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  で,  $D$  は  $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$  に移る (2) (3) と同じタイプ).

$$V_2 = 4 \iint_E \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{-3} \right\} dr \\ = -\frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \left[ (a^2 - r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{r=a \cos \theta} d\theta = \frac{4a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{2a^3}{3} \left( \pi - \frac{4}{3} \right)$$



4 (1)  $u = x + y, v = y + z, w = z + x$  とおくと,

$x = (u - v + w)/2, y = (u + v - w)/2, z = (-u + v + w)/2$  だから, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

と計算できる. このとき,  $V$  は  $W = \{(u, v, w) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}$  に移り,  $(x+y)(y+z)(z+x) = uvw$  だから,

$$K_1 = \iiint_W uvw \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw = \frac{1}{2} \int_0^1 du \int_0^1 dv \int_0^1 uvw dw = \frac{1}{2} \int_0^1 u du \int_0^1 v dv \int_0^1 w dw = \frac{1}{16}$$

(2) 3次元の極座標変換  $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$  に対して, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \dots = r^2 \sin \theta$$

となる (一度は計算しておこう). このとき  $V$  は  $W = \{(r, \theta, \varphi) \mid a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  に移るから,

$$K_2 = \iiint_W \frac{1}{r^p} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \left( \int_a^b \frac{dr}{r^{p-2}} \right) \left( \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) = \begin{cases} \frac{4\pi}{p-3} \left( \frac{1}{a^{p-3}} - \frac{1}{b^{p-3}} \right) & (p \neq 3) \\ 4\pi \log \frac{b}{a} & (p = 3) \end{cases}$$